531-3 x = +

Les nombres en euros cherchés sont des rationnels de la forme $\frac{n}{d}$, où d est un diviseur de 100.

On cherchera dans un premier temps tous les rationnels dont la somme est égale au produit.

1) Solutions rationnelles

Soit S la somme de deux rationnels dont la somme est égale au produit.

Les deux rationnels sont les solutions de l'équation du second degré : $X^2\text{-}S.X+S=0$ (1)

Le discriminant $\Delta=S^2-4S$ est le carré d'un rationnel positif D.

L'équation $S^2-4S=D^2$ correspond à un quart d'hyperbole.

Les points de coordonnées rationnelles (S, D) s'obtiennent en coupant l'hyperbole par les droites issues de l'origine (0,0), de coefficient directeur rationnel.

Pour un coefficient directeur t, le point (S, tS) vérifie : $S^2-4S=t^2.S^2$

Si t est une fraction irréductible $\frac{a}{b}$, on trouve : $S=\frac{4}{1\text{-}t^2}=\frac{4a^2}{a^2\text{-}b^2}$ et $D=\frac{4t}{1\text{-}t^2}=\frac{4ab}{a^2\text{-}b^2}$

Les solutions de l'équation (1) sont : $X=\frac{S\pm D}{2}=\frac{2a.(a\pm b)}{a^2\text{-}b^2}=\frac{2a}{a\text{-}b}$ ou $\frac{2a}{a+b}$

Si a et b sont de parités distinctes, les deux fractions $\frac{2a}{a\text{-}b}$ ou $\frac{2a}{a+b}$ sont irréductibles.

Si a et b sont impairs, les deux fractions sont simplifiables par 2.

2) Solutions en euros

a) Cas où a et b sont de parités distinctes

Les dénominateurs a- b et a+ b sont des diviseurs impairs de 100, premiers entre eux.

Il y a trois possibilités :