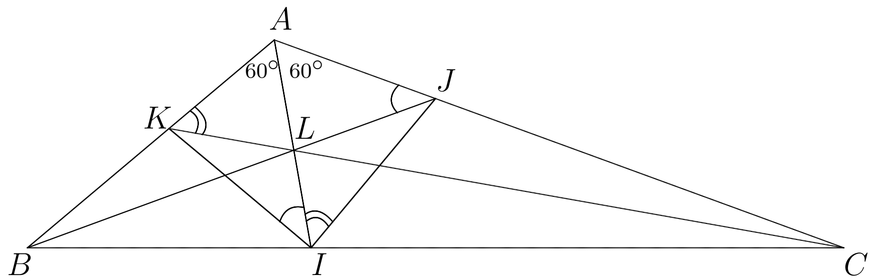
536-1 Une figure sans paroles.



Pour montrer que l'angle $\widehat{KIJ}$ est droit, il existe une solution classique que l'on trouve facilement sur Internet (Figures sans paroles, Image des mathématiques, CNRS, (9)). Cette solution consiste à remarquer que, dans le triangle ABI, la droite (AC) est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{BAI}$ et la droite (BJ) est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ABI}$. Il en résulte que la droite (IJ) est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{BIA}$, et on en déduit les angles demandés.

Voici une autre solution, un peu plus longue, mais basée sur un principe différent.

On désigne par a, b et c les longueurs respectives des côtés $[BC], [CA], [AB]$, par $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ les angles du triangle ABC et on note L le centre du cercle inscrit dans ABC.

Nous allons montrer que les triangles AIK et AJL sont semblables, en montrant que

$$\frac{AK}{AL} = \frac{AI}{AJ}.$$

Puisque $\hat{A} = 120°$, on a $a^2 = b^2 + c^2 + bc$, et il est bien connu que

$$AK = \frac{bc}{a+b}, \quad AJ = \frac{bc}{a+c}, \quad AI = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{\hat{A}}{2} = \frac{bc}{b+c}$$

et $AL = \dfrac{-a+b+c}{2\cos\frac{\hat{A}}{2}} = -a+b+c = \dfrac{bc}{a+b+c}$, car $(b+c)^2 - a^2 = bc$.

On a donc $AK{\cdot}AJ = AL{\cdot}AI$ si et seulement si

$$\frac{bc}{a+b} \cdot \frac{bc}{a+c} = \frac{bc}{a+b+c} \cdot \frac{bc}{b+c} \iff (a+b)(a+c) = (a+b+c)(b+c),$$

et $(a+b)(a+c-b-c) - c(b+c) \iff a^2 - b^2 - bc - c^2 = 0$.

On a donc montré que les triangles AIK et AJL sont semblables, ce qui entraîne

$$\widehat{KIA} = \widehat{AJL} = 180° - \left(120° + \frac{\hat{B}}{2}\right) = 60° - \frac{\hat{B}}{2} = 30° + \frac{\hat{C}}{2}.$$

En échangeant les roles de $\hat{B}$ et $\hat{C}$, on obtient $\widehat{AIJ} = 60° - \dfrac{\hat{C}}{2} = 30° + \dfrac{\hat{B}}{2}$, et donc

$$\widehat{KIJ} = 90°.$$

Dans le triangle AKI, puisque $L \in [AI]$, on a

$$\widehat{LKI} = 180° - \left(\widehat{KAI} + \widehat{AIK} + \widehat{LKA}\right) = 180° - (60° + 90°) = 30°.$$

Marie-Nicole Gras