536-3 Peut-être dû à George Pólya.

On considère un entier $x \geq 11$ dont l'écriture décimale ne comporte aucun zéro, et on désigne par $P(x)$ le produit de ses chiffres. Nous allons montrer que

(i) Si l'entier x possède un chiffre différent de 9, alors $P(x) < x^\gamma$, où $\gamma = \log_{10}(9)$.

(ii) Si $x = \underbrace{9 \cdots 9}_{n}$, alors $P(x) > x^\gamma$, pour tout $n \geq 2$.

Nous allons d'abord montrer les 2 propriétés (A) et (B) suivantes :

(A) Soit x un entier de n chiffres, $n \geq 2$; on suppose que x possède un chiffre $a \neq 9$, on isole ce chiffre et on écrit

$$x = a_1 + 10a_2 + \cdots + 10^k a + \cdots + a_n 10^{n-1}, \quad \text{avec} \quad 1 \leq k \leq n.$$

Soit b un entier, $9 \geq b > a$ (qui existe puisque $a \neq 9$), et soit

$$y = a_1 + 10a_2 + \cdots + 10^k b + \cdots + a_n 10^{n-1}.$$

Alors on a l'inégalité $\quad \dfrac{P(x)}{x^\gamma} < \dfrac{P(y)}{y^\gamma}.$

Pour démontrer (A), on écrit les entiers x, $P(x)$, y et $P(y)$ sous la forme

$$x = t + 10^k a, P(x) = ap, \quad y = t + 10^k b, P(y) = bp, \quad \text{avec } t \geq 1 \text{ et } p \geq 1.$$

Alors on a les équivalences

$$\frac{P(x)}{x^\gamma} < \frac{P(y)}{y^\gamma} \iff \frac{ap}{(t+10^k a)^\gamma} < \frac{bp}{(t+10^k b)^\gamma} \iff \frac{a^{\frac{1}{\gamma}}}{t+10^k a} < \frac{b^{\frac{1}{\gamma}}}{t+10^k b},$$

et on considère

$$\begin{aligned} F &= b^{\frac{1}{\gamma}}(t+10^k a) - a^{\frac{1}{\gamma}}(t+10^k b) \\ &= t\left(b^{\frac{1}{\gamma}} - a^{\frac{1}{\gamma}}\right) + 10^k\left(ab^{\frac{1}{\gamma}} - ba^{\frac{1}{\gamma}}\right) \\ &= t\left(b^{\frac{1}{\gamma}} - a^{\frac{1}{\gamma}}\right) + 10^k ab\left(b^{\frac{1}{\gamma}-1} - a^{\frac{1}{\gamma}-1}\right). \end{aligned}$$

Or $\gamma = \log_{10}(9) \approx 0.954$, et donc $\frac{1}{\gamma} - 1 \approx 0.048 > 0$; puisque, par hypothèse, $b > a$, on a $F > 0$, ce qui achève la démonstration de (A).

(B) Soit u_n l'entier de n chiffres, $u_n = 8\underbrace{9 \cdots 9}_{n-1}$; alors on a $P(u_n) < u_n^\gamma$.

On le démontre par récurrence sur $n \geq 2$.

– Si $n = 2$, $u_2 = 89$, $P(u_2) = 72$ et $89^\gamma \approx 72.4375$.

– On suppose que, à l'ordre n, on a $P(u_n) < u_n^\gamma$, c'est-à-dire $8 \times 9^{n-1} < \Big(8\underbrace{9 \cdots 9}_{n-1}\Big)^\gamma$.

On remarque que $10^\gamma = 9$, et on multiplie les deux membres de l'inégalité par 9 et on obtient

$$8 \times 9^n < 10^\gamma \Big(8\underbrace{9 \cdots 9}_{n-1}\Big)^\gamma = \Big(8\underbrace{9 \cdots 9}_{n-1}0\Big)^\gamma < \Big(8\underbrace{9 \cdots 99}_{n}\Big)^\gamma$$

et on a bien montré que $P(u_{n+1}) < u_{n+1}^\gamma$.

Démonstration de **(i)**.

On considère maintenant un entier x de n chiffres qui possède au moins un chiffre c distinct de 9. On remplace c par 8 et tous les autres chiffres par 9 ; on obtient ainsi un entier y comprenant un chiffre égal à 8 et $n-1$ chiffres égaux à 9. D'après (A), on a

$$\frac{P(x)}{x^\gamma} \leq \frac{P(y)}{y^\gamma}.$$

On constate que les chiffres de u_n sont ceux de y écrits dans l'ordre croissant ; alors, puisque $P(y) = P(u_n)$ et $y^\gamma \geq u_n^\gamma$, on a

$$\frac{P(y)}{y^\gamma} \leq \frac{P(u_n)}{u_n^\gamma}.$$

Mais d'après (B), on a

$$\frac{P(u_n)}{u_n^\gamma} < 1,$$

et on a donc bien montré (i).

Démonstration de **(ii)**.

On considère $v_n = \underbrace{9\cdots9}_{n}$; alors $P(v_n) = 9^n$ et

$$v_n^\gamma < \Big(\underbrace{9\cdots9}_{n}+1\Big)^\gamma = (10^n)^\gamma = 9^n = P(v_n)$$

et on a bien montré (ii).

Marie-Nicole Gras