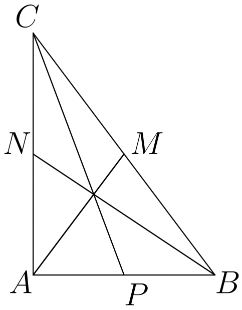
536-4 Clin d'œil à Robert Desnos.

Un triangle pythagorique avec les trois médianes entières n'existe pas ; seule une médiane, celle issue du sommet, peut être entière.



On désigne par ABC le triangle rectangle de sommet A et par M, N et P les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Puisque le triangle est rectangle en A, $AM = \frac{BC}{2}$; pour que la médiane AM soit entière, il faut et il suffit que la longueur de BC soit un entier pair et alors $AB^2 + AC^2 = BC^2 \equiv 0 \pmod 4$. Les longueurs de AB et AC doivent être aussi des entiers pairs, car sinon, on aurait $AB^2 + AC^2 \equiv 1$ ou $2 \pmod 4$.

On a donc

$$BC = 2a, \quad AC = 2b \text{ et } AB = 2c.$$

Alors, les longueurs des médianes sont

$$AM = a, \quad BN = \sqrt{b^2 + 4c^2} \text{ et } CP = \sqrt{4b^2 + c^2}.$$

Nous allons montrer que les longueurs des deux médianes BN et CP ne sont pas des entiers.

On a donc la relation $a^2 = b^2 + c^2$, et on peut supposer $\text{pgcd}(b, c) = 1$. Il est connu que cette équation diophantienne admet comme solutions :

$$b = x^2 - y^2, \quad c = 2xy, \quad a = x^2 + y^2, \quad \text{pgcd}(x, y) = 1.$$

Alors $BN^2 = (x^2 - y^2)^2 + 16x^2y^2$ et $CP^2 = 4(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2$.

Dans le livre de L. J. Mordell, Diophantine Equations, ch. 4, (8), il est montré que l'équation diophantienne $(x^2-y^2)^2+x^2y^2 = x^4-x^2y^2+y^4 = z^2$, $\text{pgcd}(x, y) = 1$, admet comme seules solutions

$$x^2 = 1 \text{ et } y = 0, \qquad x = 0 \text{ et } y^2 = 1, \qquad x^2 = y^2 = 1.$$

L'équation $(x^2 - y^2)^2 + 16x^2y^2 = z^2$, $\text{pgcd}(x, y) = 1$, se ramène à la précédente en remplaçant $2x$ et $2y$ respectivement par $x + y$ et $x - y$, et admet comme solutions

$$[x^2 = 1 \text{ et } y^2 = 0, 1] \quad \text{ou} \quad [y^2 = 1 \text{ et } x^2 = 0, 1].$$

Dans tous les cas, ces solutions donnent un côté nul au triangle ABC (!), et donc les médianes BN et CP ne sont pas entières.

Compléments.

Les solutions de l'équation $b^2 + c^2 = a^2$, $a = x^2 - y^2$, $b = 2xy$ et $c = x^2 + y^2$ sont connues et il est facile de vérifier que $(x^2-y^2)^2+(2xy)^2 = (x^2+y^2)^2$; la démonstration montre que ce sont les seules solutions.

La résolution de l'équation $x^4 - x^2y^2 + y^4 = z^2$, $\text{pgcd}(x, y) = 1$, est beaucoup moins connue ; voici la démonstration de J. L. Mordell.

On peut se limiter à chercher des solutions $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

Puisque $x^4 - x^2y^2 + y^4 = \left[x^2 - y^2\right]^2 + \left[xy\right]^2$, il existe $u, v \in \mathbb{N}$ tels que

(1) $$x^2 - y^2 = u^2 - v^2, \quad xy = 2uv, \quad \text{pgcd}(u, v) = 1,$$

ou

(2) $$x^2 - y^2 = 2uv \quad xy = u^2 - v^2, \quad \text{pgcd}(u, v) = 1.$$

I) On suppose que x et y ne sont pas tous les deux impairs ; alors on est dans le cas (1).

Le principe de résolution (qu'on peut aussi appeler "descente infinie") est le suivant : on suppose qu'il existe des solutions avec $xy \neq 0$, et donc ici $xy > 0$, et on choisit celle où xy est minimum ; on construit alors une solution pq avec $0 < pq < xy$, ce qui conduit à une contradiction. On suppose donc qu'il existe une telle solution (x, y).

Soient $d_1 = \text{pgcd}(x, v)$ et $d_2 = \text{pgcd}(y, u)$; alors $\text{pgcd}(d_1, d_2) = 1$ et on a

$$x = d_1 X, \quad v = d_1 V, \quad y = d_2 Y, \quad u = d_2 U, \quad \text{et} \quad XY = 2UV.$$

Puisque $\text{pgcd}(X, V) = 1$ et $\text{pgcd}(Y, U) = 1$, il y a deux possibilités.

(i) $X = 2U$ et $Y = V$; on a alors

$$x = d_1 X = 2d_1 U, \quad v = d_1 V, \qquad y = d_2 Y = d_2 V, \quad u = d_2 U.$$

On remplace dans $x^2 - y^2 = u^2 - v^2$, et on obtient

$$4d_1^2 U^2 - d_2^2 V^2 = d_2^2 U^2 - d_1^2 V^2 \iff d_1^2(4U^2 + V^2) = d_2^2(U^2 + V^2).$$

Si un nombre premier ℓ divise $4U^2 + V^2$ et $U^2 + V^2$, il divise $3U^2$, et $\ell = 3$ ce qui n'est pas possible puisque une somme de carrés étrangers n'est pas divible par 3. Comme $\text{pgcd}(U, V) = 1$ on a $\text{pgcd}(U^2 + V^2, 4U^2 + V^2) = 1$ et on sait que $\text{pgcd}(d_1, d_2) = 1$; donc il existe W et $T \in \mathbb{Z}$ tels que

$$U^2 + V^2 = W^2 \quad \text{et} \quad 4U^2 + V^2 = T^2.$$

Si V est pair, on pose $V = 2V_1$ et on obtient une paire d'équations similaires. On peut donc supposer V impair. Alors la relation $4U^2 + V^2 = T^2$ entraîne :

$$\text{il existe } p \text{ et } q \in \mathbb{N}, \text{pgcd}(p, q) = 1, \text{ tels que } V = p^2 - q^2 \text{ et } U = pq;$$

on reporte dans la relation $U^2 + V^2 = W^2$, et on obtient $p^4 - p^2q^2 + q^4 = W^2$, et on a

$$pq = U = \frac{u}{d_2} \leq u = \frac{xy}{2v} \leq \frac{xy}{2} < xy.$$

(ii) $X = U$ et $Y = 2V$; la méthode est analogue et on obtient le même résultat avec $U = p^2 - q^2$ et $V = pq$.

Il en résulte que dans les deux cas les seules solutions de l'équation $x^4 - x^2y^2 + y^4 = z^4$ sont telles que $xy = 0$.

II) On suppose que $x \geq 0$ et $y \geq 0$ sont tous les deux impairs ; on est donc dans le cas (2).

Alors $x^2 - y^2 = 2uv$ et $xy = u^2 - v^2$, avec $\text{pgcd}(u, v) = 1$ et ainsi u et v ne sont pas tous les deux impairs. Or on a

$$u^4 - u^2v^2 + v^4 = (u^2 - v^2)^2 + u^2v^2 = (xy)^2 + \left(\frac{x^2 - y^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)^2;$$

puisque x et y sont impairs, $\dfrac{x^2 + y^2}{2} \in \mathbb{N}$, et d'après le I), les seules solutions sont obtenues avec $uv = 0$, ce qui entraîne $x = y = 1$.

Marie-Nicole Gras