536-1 Une figure sans paroles

On utilise les coordonnées barycentriques dans le repère affine (A, B, C).

On note a, b, c les longueurs des côtés [BC], [CA], [AB].

Dans le triangle ABC, l'angle de 120° donne la relation de Pythagore généralisée : $a^2 = b^2 + c^2 + bc$

1) Calculs de distances

Soient M et N deux points de coordonnées respectives (x', y', z') et (x'', y'', z'') telles que :

$$x' + y' + z' = x'' + y'' + z'' = s$$

Alors : $\begin{cases} s \cdot \overrightarrow{AM} = y' \cdot \overrightarrow{AB} + z' \cdot \overrightarrow{AC} \\ s \cdot \overrightarrow{AN} = y'' \cdot \overrightarrow{AB} + z'' \cdot \overrightarrow{AC} \end{cases}$

En posant $\begin{cases} y = y'' - y' \\ z = z'' - z' \end{cases}$, on obtient par différence : $s \cdot \overrightarrow{MN} = y \cdot \overrightarrow{AB} + z \cdot \overrightarrow{AC}$

Et :

$$\begin{aligned} s^2 \cdot MN^2 &= c^2 \cdot y^2 + b^2 \cdot z^2 + 2yz \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= c^2 \cdot y^2 + b^2 \cdot z^2 + 2bc \cdot \cos\,(120°) \cdot yz \qquad (1) \\ &= c^2 \cdot y^2 + b^2 \cdot z^2 - bc \cdot yz \end{aligned}$$

Les coordonnées des points I, J, K sont : $I \left| \begin{matrix} 0 \\ b \\ c \end{matrix} \right. \quad J \left| \begin{matrix} a \\ 0 \\ c \end{matrix} \right. \quad K \left| \begin{matrix} a \\ b \\ 0 \end{matrix} \right.$

La formule (1) permet des calculer les distances suivantes :

$$\begin{aligned} (a+c)^2 \cdot (b+c)^2 \cdot IJ^2 &= b^2c^2 \cdot \left((a+c)^2 + (b-a)^2 + (a+c) \cdot (b-a) \right) \\ &= ab^2c^2 \cdot (2a - b + c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a+b)^2 \cdot (b+c)^2 \cdot IK^2 &= b^2c^2 \cdot \left((a+b)^2 + (b-a)^2 + (a+b) \cdot (b-a) \right) \\ &= ab^2c^2 \cdot (2a + b - c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a+c)^2 \cdot (a+b)^2 \cdot JK^2 &= b^2c^2 \cdot \left((a+c)^2 + (a+b)^2 + (a+c) \cdot (a+b) \right) \\ &= ab^2c^2 \cdot (4a + 3b + 3c) \end{aligned}$$

$$(b+c)^2 \cdot BI^2 = c^2 \cdot (c^2 + b^2 + bc) = a^2 \cdot c^2$$

$$\begin{aligned}(a+c)^2 \cdot BJ^2 &= c^2 \cdot \left((a+c)^2 + b^2 + b \cdot (a+c)\right) \\ &= ac^2 \cdot (2a + b + 2c)\end{aligned}$$

2) Le triangle IJK est rectangle en I

Les calculs de distances ci-dessus permettent d'obtenir :

$$\frac{(a+b)^2 \cdot (a+c)^2 \cdot (b+c)^2}{ab^2c^2} \cdot \left(IJ^2 + IK^2 - JK^2\right) = 4(a+b+c) \cdot (a^2 - b^2 - c^2 - bc) = 0$$

Donc le triangle IJK est bien rectangle en I.

3) Le triangle BJI a en J un angle de 30°

Il faut démontrer que : $BI^2 = IJ^2 + BJ^2 - 2 \cdot IJ \cdot BJ \cdot \cos\,(30°) = IJ^2 + BJ^2 - IJ \cdot BJ \cdot \sqrt{3}$

Les calculs de distances ci-dessus permettent d'obtenir :

$$\begin{aligned}&\frac{(a+c)^2 \cdot (b+c)^2}{ac^2} \cdot \left(IJ^2 + BJ^2 - BI^2 - BJ \cdot IJ \cdot \sqrt{3}\right) \\ &= b^2 \cdot (2a - b + c) + (b+c)^2 \cdot (2a + b + 2c) - (a+c)^2 \cdot a - b \cdot (b+c) \cdot \sqrt{(2a+b+2c) \cdot (2a-b+c)} \cdot \sqrt{3} \\ &= b \cdot (b+c) \cdot \sqrt{3} \cdot \left((a+c) \cdot \sqrt{3} - \sqrt{(2a+b+2c) \cdot (2a-b+c)}\right)\end{aligned}$$

Le résultat est nul car la différence des carrés des termes du dernier facteur est :

$$3 \cdot (a+c)^2 - (2a+b+2c) \cdot (2a-b+c) = -a^2 + b^2 + c^2 + bc = 0$$

Donc le triangle BJI a bien en J un angle de 30°.

On montre de même, en échangeant les rôles de b et c que le triangle CKI a en K un angle de 30°.