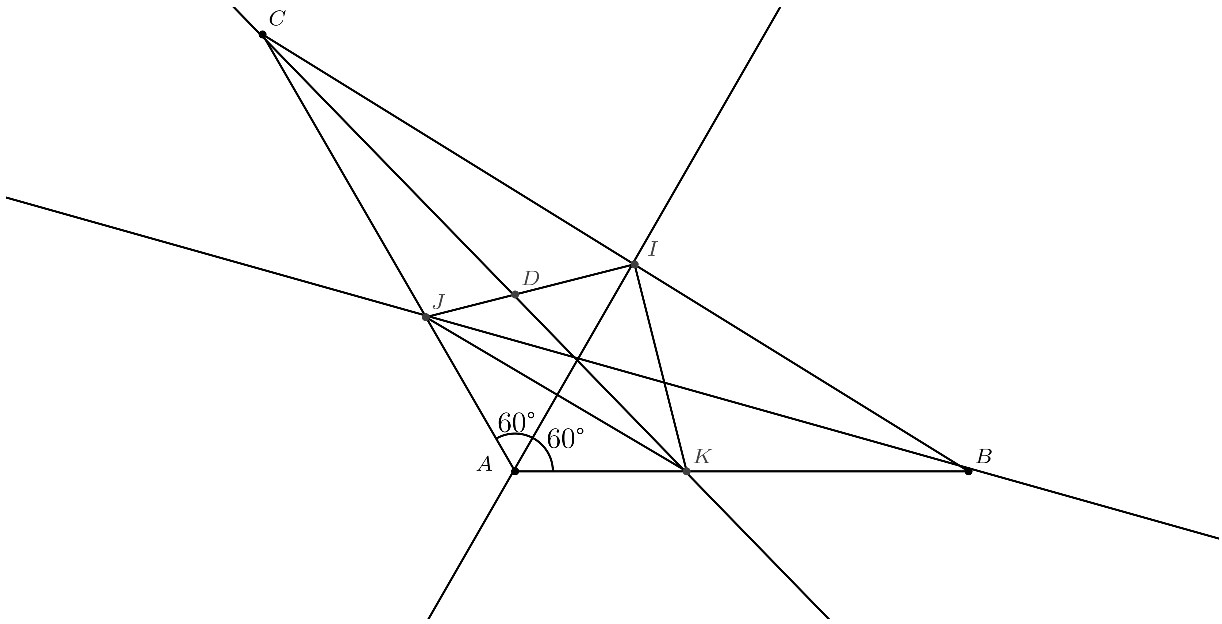
532.4 Une figure sans paroles



On considère un triangle ABC dont l'angle $\widehat{BAC} = 120°$ .Les bissectrices des angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{CBA}$ et $\widehat{ACB}$ coupent respectivement les côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ en I , J et K.
Il faut démontrer que l'angle $\widehat{JIK} = 90°$,que l'angle $\widehat{CKI} = 30°$ et que l'angle $\widehat{IJB} = 30°$

1°) Pour démontrer que $\widehat{JIK} = 90°$, démontrons que les demi-droites $[IJ)$ et $[IK)$ sont les bissectrices des angles $\widehat{CIA}$, $\widehat{AIB}$.

Dans le triangle ABC , $[BJ)$ est la bissectrice de l' angle $\widehat{CBA}$ on a alors :
$\dfrac{JA}{JC} = \dfrac{BA}{BC}$ et $\dfrac{BA}{sin(\widehat{ACB})} = \dfrac{BC}{sin(\widehat{BAC})} \Leftrightarrow \dfrac{BA}{BC} = \dfrac{sin(\widehat{ACB})}{sin(\widehat{BAC})} = \dfrac{sin(\widehat{ACB})}{sin(120°)}$

Dans le triangle CIA , $\dfrac{IA}{sin(\widehat{ACI})} = \dfrac{IC}{sin(\widehat{CAI})}$ donc $\dfrac{IA}{IC} = \dfrac{sin(\widehat{ACI})}{sin(\widehat{CAI})} = \dfrac{sin(\widehat{ACI})}{sin(60°)}$

Comme $\widehat{ACI} = \widehat{ACB}$ et $sin(120°) = sin(60°)$ alors $\dfrac{IA}{IC} = \dfrac{BA}{BC} = \dfrac{JA}{JC}$
Dans le triangle CIA ,l'égalité $\dfrac{JA}{JC} = \dfrac{IA}{IC}$ démontre que la demi-droite $[IJ)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{CIA}$

De même on démontre que la demi-droite $[IK)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{AIB}$ en utilisant que dans le triangle ABC , $[CK)$ est la bissectrice de l' angle $\widehat{ACB}$
on a alors $\dfrac{KA}{KB} = \dfrac{CA}{CB}$
et des égalités $\dfrac{CA}{CB} = \dfrac{sin(\widehat{ABC})}{sin(\widehat{BAC})}$, $\dfrac{IA}{IB} = \dfrac{sin(\widehat{IBA})}{sin(\widehat{IAB})}$ on déduit que : $\dfrac{KA}{KB} = \dfrac{IA}{IB}$
et $[IK)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{AIB}$.
Comme l'angle $\widehat{CIB}$ est un angle plat , les demi-droites $[IJ)$ et $[IK)$ sont perpendiculaires donc l'angle $\widehat{JIK} = 90°$

2. Pour démontrer que l'angle $\widehat{CKI} = 30°$ et que l'angle $\widehat{IJB} = 30°$, on trace la perpendiculaire $\triangle$ à la droite (AB) en A et la perpendiculaire $\triangle'$ à la droite (AC) en A

a) Démontrons que $\widehat{CKI} = 30°$.

La droite $\triangle$ coupe $[IJ]$ en un point D.

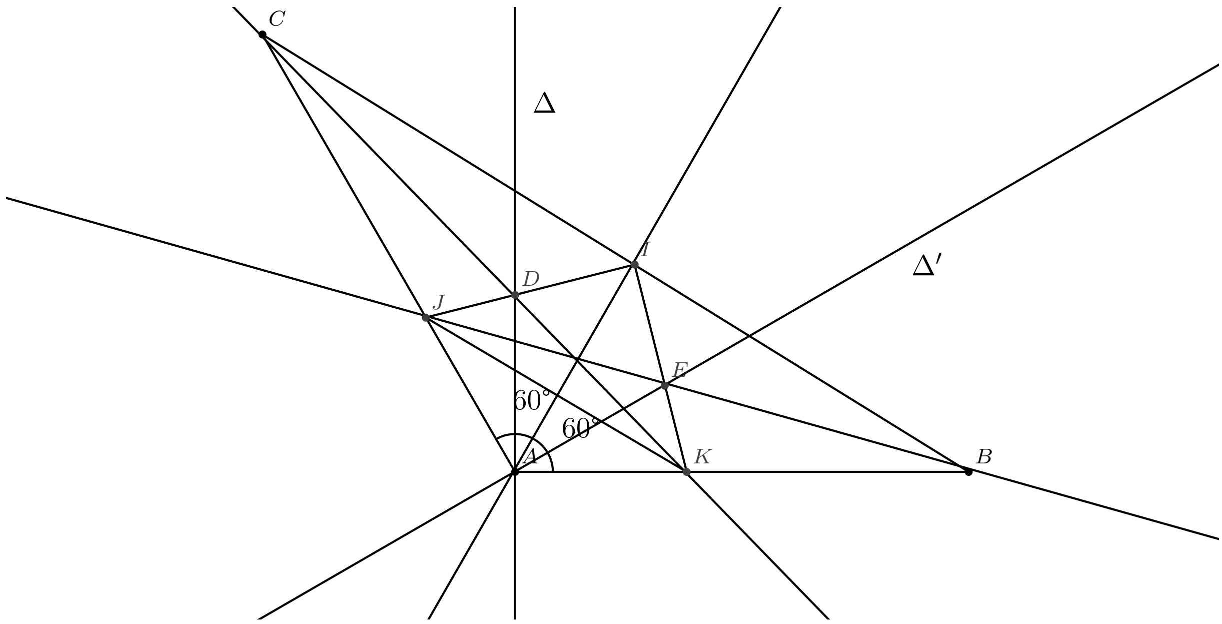
$\widehat{BAD} = 90°$ et $\widehat{BAI} = 60°$ donc $\widehat{IAD} = 30°$

$\widehat{IAD} = 30°$ et $\widehat{IAC} = 60°$ donc $\widehat{DAJ} = 30°$

donc $[AD)$ est la bissectrice de l' angle $\widehat{IAC}$ alors comme la demi-droite $[IJ)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{CIA}$, le point D appartenant à $[IJ]$ est le point de concours des trois bissectrices du triangle CIA.

Les quatre points A , D , I et K sont cocycliques car $\widehat{KAD} = 90°$ et $\widehat{DIK} = 90°$

on déduit que $\widehat{IKD} = \widehat{IAD} = 30° =$ et donc $\widehat{IKC} = 30°$



b)Démontrons que $\widehat{IJB} = 30°$.C'est la même méthode qu' au a).

La droite $\triangle'$ coupe le segment $[IK]$ en un point E.

Comme $\widehat{CAE} = 90°$ et $\widehat{BAC} = 120°$ donc $\widehat{BAE} = 30°$

$\widehat{CAE} = 90°$ et $\widehat{IAC} = 60°$ donc $\widehat{IAE} = 30°$

donc la demi-droite $[AE)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAI}$

alors comme la demi-droite $[BJ)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{IBA}$,

on en déduit que le point E appartenant à $[IJ]$ est le point de concours des trois bissectrices du triangle IAB.

Les quatre points A , E , I et J sont cocycliques car $\widehat{JAE} = 90°$ et $\widehat{JIK} = 90°$

on déduit que $\widehat{IJE} = \widehat{IAE} = 30° =$ et donc $\widehat{IJB} = 30°$