Problèmes APMEP n°535

BLANC Thomas

July 20, 2020

1 Problème 535-2

Le n-ième nombre triangulaire Δ_n s'obtient en ajoutant n au précédent et donc est la somme des entiers de 1 à n. On a $\Delta_1 = 1$; $\Delta_2 = 3$; $\Delta_3 = 6$; $\Delta_4 = 10$; $\Delta_5 = 15$, ...
Par exemple, il est possible d'écrire 7 comme une combinaison des 5 premiers nombres triangulaires avec des coefficients $+1$ et -1 :

$$\begin{aligned} 7 &= -1 - 3 + 6 - 10 + 15 \\ &= (-1)\Delta_1 + (-1)\Delta_2 + (+1)\Delta_3 + (-1)\Delta_4 + (+1)\Delta_5. \end{aligned}$$

Plus généralement, il faudrait montrer que pour tout entier relatif N il existe un entier naturel n tel que N peut s'écrire comme une combinaison à coefficients $+1$ ou -1 des n premiers nombres triangulaires.

Réponse proposée :

- On commence par traiter deux exemples. La relation utile étant, pour tout $i \in \mathbb{N}^\star$:

$$\Delta_{i+1} - \Delta_i = i + 1$$

  - Exemple dans le cas pair :

$$\begin{aligned} 8 &= 2 + 2 + 2 + 2 \\ &= (4-2) + (8-6) + (12-10) + (16-14) \\ &= ((\Delta_4 - \Delta_3) - (\Delta_2 - \Delta_1)) + ((\Delta_8 - \Delta_7) - (\Delta_6 - \Delta_5)) + \dots \\ &\quad \dots ((\Delta_{12} - \Delta_{11}) - (\Delta_{10} - \Delta_9)) + ((\Delta_{16} - \Delta_{15}) - (\Delta_{14} - \Delta_{13})) \\ &= \Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5 - \Delta_6 - \Delta_7 + \Delta_8 + \dots \\ &\quad \dots \Delta_9 - \Delta_{10} - \Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{13} - \Delta_{14} - \Delta_{15} + \Delta_{16} \end{aligned}$$

  - Exemple dans le cas impair :

$$\begin{aligned} 5 &= 1 + 2 + 2 \\ &= 1 + (5-3) + (9-7) \\ &= \Delta_1 + ((\Delta_5 - \Delta_4) - (\Delta_3 - \Delta_2)) + ((\Delta_9 - \Delta_8) - (\Delta_7 - \Delta_6)) \\ &= \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 - \Delta_4 + \Delta_5 + \Delta_6 - \Delta_7 - \Delta_8 + \Delta_9 \end{aligned}$$

  On généralise la construction proposée dans ces deux exemples.

- $\boxed{\text{Cas } N \in \mathbb{N}^\star}$

Les propriétés permettant d'obtenir le résultat sont les suivantes :

- Soit $i \in \mathbb{N}^\star$, par définition de Δ_i on a : $\Delta_{i+1} - \Delta_i = i + 1$.
- On déduit du point précédent que pour tout $i \in \mathbb{N}^\star$, on a

$$(\Delta_{i+3} - \Delta_{i+2}) - (\Delta_{i+1} - \Delta_i) = i + 3 - (i + 1) = 2$$

Ainsi, dans le cas où N **est pair**, i.e. $N = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^\star$, on a :

$$\boxed{N = 2p = \sum_{k=1}^{p} \underbrace{(\Delta_{4k} - \Delta_{4k-1}) - (\Delta_{4k-2} - \Delta_{4k-3})}_{=2}}$$

On a bien écrit N comme une combinaison des $n = 4p = 2N$ premiers nombres triangulaires à coefficients $+1$ ou -1.

De même, dans le cas où N **est impair**, i.e. $N = 1 + 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\boxed{N = 1 + 2p = \underbrace{\Delta_1}_{=1} + \sum_{k=1}^{p} \underbrace{(\Delta_{4k+1} - \Delta_{4k}) - (\Delta_{4k-1} - \Delta_{4k-2})}_{=2}}$$

On a bien écrit N comme une combinaison des $n = 4p + 1 = 2N - 1$ premiers nombres triangulaires à coefficients $+1$ ou -1.

- $\boxed{\text{Cas } N \in \mathbb{Z}_-^\star}$

Soit $N \in \mathbb{Z}_-^\star$. On a $-N \in \mathbb{N}^\star$ et, d'après ce qui précède, il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in \{+1; -1\}^n$ tels que

$$-N = \sum_{k=1}^{n} x_k \, \Delta_k$$

ainsi

$$N = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(-x_k)}_{\in\{+1;-1\}} \Delta_k$$

On a bien écrit N comme une combinaison des n premiers nombres triangulaires à coefficients $+1$ ou -1.

- $\boxed{\text{Cas } N = 0}$

On a $0 = -1 - 3 - 6 + 10 = -\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3 + \Delta_4$, donc 0 est écrit comme une combinaison des 4 premiers nombres triangulaires à coefficients $+1$ ou -1.