2 Problème 535-3

On définit les suites (F_n) et (L_n) de Fibonacci et de Lucas par les relations de récurrence :

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \text{ avec } F_1 = F_2 = 1 \quad ; \quad L_{n+2} = L_{n+1} + L_n \text{ avec } L_1 = 1 \text{ et } L_2 = 3$$

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que $\sum_{i=1}^{n} L_i = \sum_{i=1}^{n} F_i + 2F_{n+1} - 2$.

Réponse proposée :

- Le résultat est clair dans le cas où $n = 1$ ($L_1 - F_1 = 0 = 2(F_2 - 1)$).
- Il faut donc montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$

$$2(F_{n+1} - 1) = \sum_{i=1}^{n}(L_i - F_i) = \sum_{i=2}^{n}(L_i - F_i) = \sum_{i=1}^{n-1}(L_{i+1} - F_{i+1})$$

  Pour tout $n \geqslant 2$, l'expression $F_{n+1} - 1$ peut être réécrite à l'aide d'une somme télescopique et de la relation $F_{n+2} - F_{n+1} = F_n$:

$$F_{n+1} - 1 = F_{n+1} - F_1 = \sum_{i=1}^{n}(F_{i+1} - F_i) = \sum_{i=2}^{n}(F_{i+1} - F_i) = \sum_{i=2}^{n} F_{i-1} = \sum_{i=1}^{n-1} F_i$$

  En fin de compte, il faut montrer, pour tout $n \geqslant 2$, que :

$$\sum_{i=1}^{n-1}(2F_i) = \sum_{i=1}^{n-1}(L_{i+1} - F_{i+1}) \tag{2.1}$$

- En fait, pour tout $i \in \mathbb{N}^\star$, $\boxed{\text{les expressions } L_{i+1} - F_{i+1} \text{ et } 2F_i \text{ sont égales}}$.
  En effet :

  - **Méthode 1 :** En explicitant les suites (L_n) et (F_n) :
    les suites (F_n) et (L_n) étant linéaires récurrentes d'ordre 2, on peut les expliciter. L'équation caractéristique (commune aux deux suites) $r^2 - r - 1 = 0$ admet deux solutions

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \overline{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

    A l'aide des conditions $F_1 = 1$ et $F_2 = 1$, on obtient que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^\star, \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \overline{\varphi}^n\right)$$

    A l'aide des conditions $L_1 = 1$ et $L_2 = 3$, on obtient que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^\star, \quad L_n = \varphi^n + \overline{\varphi}^n$$

    Ainsi, pour tout $i \in \mathbb{N}^\star$, on a

$$\begin{aligned} L_{i+1} - F_{i+1} &= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\varphi^{i+1} + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\overline{\varphi}^{i+1} \\ &= \overbrace{\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{5}} - 1\right)}^{=2/\sqrt{5}}\varphi^i + \overbrace{\overline{\varphi}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} + 1\right)}^{=-2/\sqrt{5}}\overline{\varphi}^i = \frac{2}{\sqrt{5}}(\varphi^i - \overline{\varphi}^i) = 2F_i. \end{aligned}$$

- **Méthode 2 :** En raisonnant par récurrence double :
  * Cas $n = 1$: $L_2 - F_2 = 3 - 1 = 2 = 2 \times 1 = 2F_1$.
    Cas $n = 2$: $L_3 - F_3 = 4 - 2 = 2 = 2 \times 1 = 2F_2$.
  * Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Supposons que $L_{n+1} - F_{n+1} = 2F_n$ et que $L_{n+2} - F_{n+2} = 2F_{n+1}$.
    Montrons que $L_{n+3} - F_{n+3} = 2F_{n+2}$.

$$\begin{aligned}
L_{n+3} - F_{n+3} &= (L_{n+2} + L_{n+1}) - (F_{n+2} + F_{n+1}) \quad \text{(par définition de } (L_n) \text{ et } (F_n)\text{)} \\
&= (L_{n+2} - F_{n+2}) + (L_{n+1} - F_{n+1}) \\
&= 2F_{n+1} + 2F_n \quad \text{(par hypothèses de récurrence)} \\
&= 2F_{n+2} \quad \text{(par définition } (F_n)\text{)}
\end{aligned}$$

  * Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $L_{n+1} - F_{n+1} = 2F_n$.

La relation (2.1) est donc vraie, ce qui conclut la preuve.