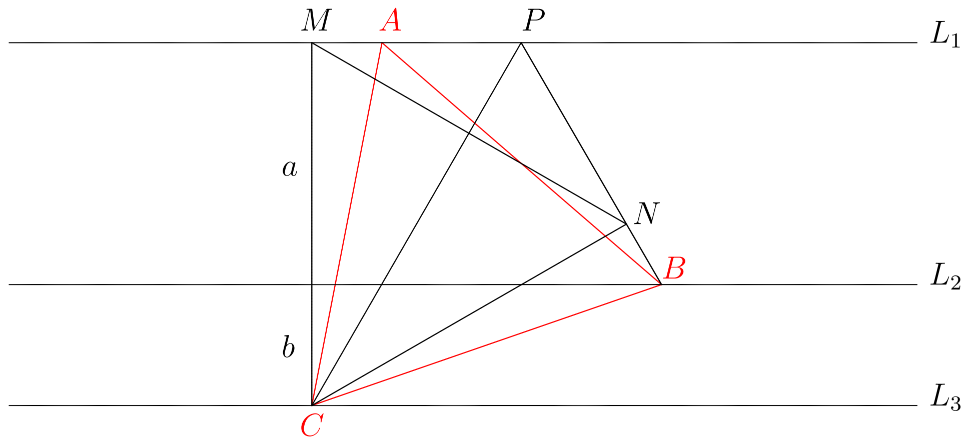
537-2 Construction sous contrainte.

On désigne par L_1, L_2 et L_3 les trois droites disposées comme sur la figure et on cherche 3 points $A \in L_1$, $B \in L_2$ et $C \in L_3$ tels que le triangle ABC soit équilatéral.



On fixe un point C sur L_3, on désigne par M le pied de la perpendiculaire menée de C sur L_1 et on construit le triangle équilatéral CNM avec, par exemple, N à droite de CM. La bissectrice de $\widehat{MCN}$ coupe L_1 en P et la droite (PN) coupe L_2 en B. Enfin, on construit le triangle équilatéral ABC, avec A et L_1 du même côté de BC.

Il reste à montrer que $A \in L_1$: on a $CM = CN$, $CA = CB$ et $\widehat{ACM} = \widehat{BCN}$; il en résulte que les triangles ACM et BCN sont égaux, donc $\widehat{AMC}$ est droit et $A \in L_1$.

On a donc bien construit le triangle équilatéral ABC.

Pour conclure on calcule la longueur de son côté en fonction de $a = d(L_1, L_2)$ et $b = d(L_2, L_3)$.

Puisque $\widehat{MPB} = 120°$, on a $PB = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$, $PN = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\dfrac{a+b}{2}$ et donc $BN = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\dfrac{a-b}{2}$; on en déduit que

$$BC^2 = BN^2 + NC^2 = \frac{(a-b)^2}{3} + (a+b)^2 = \frac{4}{3}(a^2 + ab + b^2).$$

Marie-Nicole Gras