537-3 Deux équations diophantiennes.

a) On recherche les solutions $\neq (0,0,0)$ de l'équation diophantienne

$$x^2 + y^2 = 31z^2,\ \ x,y,z \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

On cherche donc x, y, z non tous nuls (donc nécessairement tous non nuls), premiers entre eux 2 à 2, et alors l'équation est impossible modulo 4. En effet, les carrés d'entiers sont congrus à 0 ou 1 modulo 4, et donc $31z^2 \equiv 0$ ou $3 \pmod 4$, tandis que $x^2 + y^2 \equiv 1$ ou $2 \pmod 4$.

b) Pour l'équation diophantienne

$$x^2 + y^2 = 29z^2,\ \ x,y,z \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

on cherche de même x, y, z non nuls, premiers entre eux 2 à 2 ; nous allons montrer que l'ensemble des solutions de l'équation est (proprement) paramétré de la façon suivante selon deux sous ensembles disjoints, à permutation près et aux signes près, de x et y,

$$\begin{cases} x &=& 2(a^2-b^2) - 10ab, \\ y &=& 5(a^2-b^2) + 4ab, \\ z &=& a^2 + b^2, \end{cases}$$

pour $a > 0,\ b \geq 0$ dans $\mathbb{N}$, $\mathrm{pgcd}(a,b) = 1,\ a \not\equiv b \pmod 2,\ a + 12b \not\equiv 0 \pmod{29}$.

$$\begin{cases} x &=& [2(a^2-b^2) - 10ab]/29, \\ y &=& [5(a^2-b^2) + 4ab]/29, \\ z &=& [a^2 + b^2]/29, \end{cases} \tag{3}$$

pour $a > 0,\ b \geq 0$ dans $\mathbb{N}$, $\mathrm{pgcd}(a,b) = 1,\ a \not\equiv b \pmod 2,\ a + 12b \equiv 0 \pmod{29}$.

On considère le sous ensemble $\mathbb{Q}(i) := \left\{ \dfrac{u+vi}{w}, u,v,w \in \mathbb{Z}, w \neq 0 \right\}$ de $\mathbb{C}$, et on désigne par N le carré de la norme complexe, soit $N(X + iY) = X^2 + Y^2$, pour tout $X, Y \in \mathbb{Q}$, et par $\overline{\alpha}$ le conjugué complexe de $\alpha \in \mathbb{Q}(i)$.

Comme $29 \equiv 1 \pmod 4$ est premier, il est, de façon unique (aux signes près), somme de deux carrés d'entiers, soit $29 = 2^2 + 5^2$. L'équation (2) s'écrit donc,

$$N(x+iy) = N\big[(2+5i)z\big] \iff x + iy = (2+5i)z\,\theta, \tag{4}$$

où θ est n'importe quel élément de $\mathbb{Q}(i)$ tel que $N(\theta) = 1$.

Proposition 1. Un élément θ de $\mathbb{Q}(i)$ est tel que $N(\theta) = 1$ si et seulement si il existe $a, b \in \mathbb{Z}$, $(a,b) \neq (0,0)$, tels que $\theta = \dfrac{a+bi}{a-bi}\cdot$

En effet, si $\theta \neq -1$, on considère $\beta = 1+\theta \in \mathbb{Q}(i)$; alors $\overline{\beta} = 1+\overline{\theta} \neq 0$ et $\overline{\beta}\theta = \theta(1+\overline{\theta}) = \theta + \theta\overline{\theta} = \theta + 1 = \beta$, et on en déduit $\theta = \dfrac{\beta}{\overline{\beta}}$; si $\theta = -1$, on prend $\beta = i$. Enfin, on pose $\beta = \dfrac{a+ib}{c}$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $c \neq 0$, d'où $\theta = \dfrac{a+ib}{a-ib}$, où l'on peut supposer que $\mathrm{pgcd}(a,b) = 1$.

Proposition 2. On peut, en outre, supposer que a et b ne sont pas tous deux impairs, que $a > 0$ et $b \geq 0$.

En effet, si $a \equiv b \equiv 1 \pmod 2$, alors $a + ib = (1+i)(a' + ib')$, avec $a' = \dfrac{a+b}{2}$ et $b' = \dfrac{b-a}{2}$; alors a' et b' sont de parité différente et $\theta = \dfrac{1+i}{1-i}\,\dfrac{(a'+ib')}{(a'-ib')} = i\dfrac{a'+ib'}{a'-ib'} =: i\theta'$.
Alors, l'équation (4) s'écrit avec θ' en échangeant x et y et en changeant x de signe.

Les transformations $(a,b) \mapsto (-a,-b)$ (donnant θ) et $(a,b) \mapsto (-b,a)$ (donnant $\overline{\theta}$) conduisent à des conclusions analogues ; on peut donc restreindre le couple (a,b) au premier quadrant (privé de l'axe Ob, c'est-à-dire $a > 0$, $b \geq 0$).

Sous ces hypothèses de choix, l'équation (4) s'écrit :

$$
\begin{aligned}
&(a-ib)(x+iy) = (2+5i)(a+ib)z \\
&\iff \begin{cases} ax+by &= (2a-5b)z \\ -bx+ay &= (5a+2b)z \end{cases} \\
&\iff x = \frac{2(a^2-b^2)-10ab}{a^2+b^2}z, \quad y = \frac{5(a^2-b^2)+4ab}{a^2+b^2}z. \qquad (5)
\end{aligned}
$$

On cherche $x, y \in \mathbb{Z}$, ce qui est équivalent, après simplification, à

$$
\begin{aligned}
&2\,bz\frac{2b+5a}{a^2+b^2} \in \mathbb{Z} \ \text{ et } \ 2\,bz\frac{5b-2a}{a^2+b^2} \in \mathbb{Z}, \\
\iff &\begin{cases} (2b+5a)bz &= \lambda(a^2+b^2) \\ (5b-2a)bz &= \lambda'(a^2+b^2) \end{cases}, \ \lambda, \lambda' \in \mathbb{Z}, \quad \text{car} \quad a^2+b^2 \equiv 1 \pmod 2 \\
\iff &\begin{cases} 29abz &= \mu(a^2+b^2) \\ 29b^2z &= \mu'(a^2+b^2) \end{cases}, \ \mu, \mu' \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

Puisque pgcd$(a, b) = 1$, les entiers a et b sont étrangers à $a^2 + b^2$; donc ab divise μ et

$$z = \frac{\nu(a^2+b^2)}{29}, \ \nu \in \mathbb{Z}.$$

Il y a alors 2 cas :

(i) $a^2 + b^2 = 29\,r$, $r \geq 1$, $z = \nu\,r$; on vérifie que $a^2 + b^2 \equiv (a + 12b)\,(a - 12b) \pmod{29}$ et que, d'après (5), on a :

$2(a^2 - b^2) - 10ab \equiv 2\,(a + 12b)^2 \pmod{29}$ et $5(a^2 - b^2) + 4ab \equiv 5\,(a + 12b)^2 \pmod{29}$;

donc le cas $a+12b \equiv 0 \pmod{29}$ correspond aux cas où x et y sont donnés par la seconde expression de (3) et sont ν fois un entier ; donc $\nu = \pm 1$ et $z = (a^2 + b^2)/29$.

(ii) $a^2 + b^2 \not\equiv 0 \pmod{29}$; alors 29 divise ν et $z = t\,(a^2 + b^2)$, $t \in \mathbb{Z}$, ce qui entraîne $t \mid x$ et $t \mid y$, d'où $t = \pm 1$; ce qui correspond à la première expression de (3).

On peut donner quelques extraits des résultats en fonction de $a \in [1, 100]$ et $b \in [0, 20]$; T vaut 0 (resp. 1) si $a + 12b \equiv 0 \pmod{29}$ (resp. $\not\equiv 0 \pmod{29}$) ; si $a - 12b \equiv 0 \pmod{29}$, alors $29 \mid z$ et $x^2 + y^2 = 29^3\,z'^2$ (indiqué par $***$) :

```
a=1 b=0  x=2    y=5     z=1   (x^2+y^2)/29=1      a^2+b^2=1        T=1
a=1 b=2  x=-26  y=-7    z=5   (x^2+y^2)/29=25     a^2+b^2=5        T=1
(...)
a=1 b=12 x=-14  y=-23   z=5   (x^2+y^2)/29=25     (a^2+b^2)/29=5   T=0
a=1 b=14 x=-530 y=-919  z=197 (x^2+y^2)/29=38809  a^2+b^2=197      T=1
a=1 b=16 x=-670 y=-1211 z=257 (x^2+y^2)/29=66049  a^2+b^2=257      T=1
(...)
a=2 b=3  x=-70  y=-1    z=13  (x^2+y^2)/29=169    a^2+b^2=13       T=1
a=2 b=5  x=-142 y=-65   z=29  (x^2+y^2)/29=841    a^2+b^2=29       T=1 ***
(...)
a=4 b=11 x=-650 y=-349  z=137 (x^2+y^2)/29=18769  a^2+b^2=137      T=1
a=4 b=13 x=-826 y=-557  z=185 (x^2+y^2)/29=34225  a^2+b^2=185      T=1
(...)
a=4 b=19 x=-50  y=-49   z=13  (x^2+y^2)/29=169    (a^2+b^2)/29=13  T=0
a=5 b=2  x=-2   y=5     z=1   (x^2+y^2)/29=1      (a^2+b^2)/29=1   T=0
(...)
a=8 b=7  x=-530 y=299   z=113 (x^2+y^2)/29=12769  a^2+b^2=113      T=1
a=8 b=9  x=-26  y=7     z=5   (x^2+y^2)/29=25     (a^2+b^2)/29=5   T=0
a=8 b=11 x=-994 y=67    z=185 (x^2+y^2)/29=34225  a^2+b^2=185      T=1
a=9 b=8  x=-686 y=373   z=145 (x^2+y^2)/29=21025  a^2+b^2=145      T=1 ***
a=9 b=10 x=-938 y=265   z=181 (x^2+y^2)/29=32761  a^2+b^2=181      T=1
```

Marie-Nicole Gras