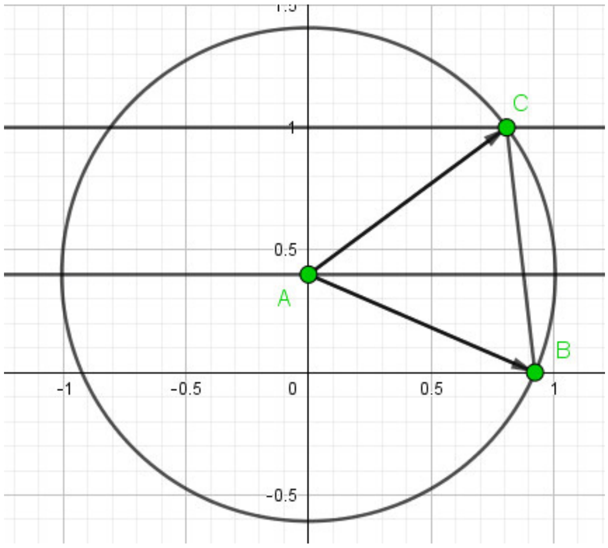
Exercice 537-2

On se place dans le un repère orthonormé dont l'axe des abscisses et l'autre est la droite d'équation y=1.

On place $A(0,h)$, $B(b,0)$, $C(c,1)$ avec $0 \le h \le \frac{1}{2}$ et b et c de même signe, on a donc $\overrightarrow{AB}(b,-h)$ et $\overrightarrow{AC}(c,1-h)$.



On note R la longueur du côté du triangle équilatéral.

On a donc le système

$$\begin{cases} AB^2 = R^2 \\ AC^2 = R^2 \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \dfrac{R^2}{2} \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} b^2 + h^2 = R^2 \\ c^2 + (1-h)^2 = R^2 \\ bc - h(1-h) = \dfrac{R^2}{2} \end{cases} \text{ et}$$

$$\begin{cases} b^2 = R^2 - h^2 \\ c^2 = R^2 - (1-h)^2 \\ bc = \dfrac{R^2}{2} + h(1-h) \end{cases}$$

Donc $\left(R^2 - h^2\right)\left(R^2 - (1-h)^2\right) = \left(\dfrac{R^2}{2} + h(1-h)\right)^2$

il vient

$$\left(R^2 - h^2\right)\left(R^2 - 1 + 2h - h^2\right) = \frac{R^4}{4} + h(1-h)R^2 + h^2(1-h)^2$$

$$R^4 - R^2 + 2hR^2 - 2h^2R^2 + h^2 - 2h^3 + h^4 = \frac{R^4}{4} + hR^2 - h^2R^2 + h^2 - 2h^3 + h^4$$

$$\frac{3}{4}R^4 - R^2 + hR^2 - h^2R^2 = 0$$

En divisant par R^2, $\frac{3}{4}R^2 - 1 + h - h^2 = 0$ soit $R^2 = \frac{4}{3}\left(h^2 - h + 1\right) = \frac{4h^2 - 4h + 4}{3}$

On a donc $\begin{cases} b^2 = \dfrac{4h^2 - 4h + 4}{3} - h^2 = \dfrac{h^2 - 4h + 4}{3} = \dfrac{(h-2)^2}{3} \\ c^2 = \dfrac{4h^2 - 4h + 4}{3} - (1-h)^2 = \dfrac{4h^2 - 4h + 4}{3} - \dfrac{3\left(1 - 2h + h^2\right)}{3} = \dfrac{h^2 + 2h + 1}{3} = \dfrac{(h+1)^2}{3} \end{cases}$

Conclusion analytique

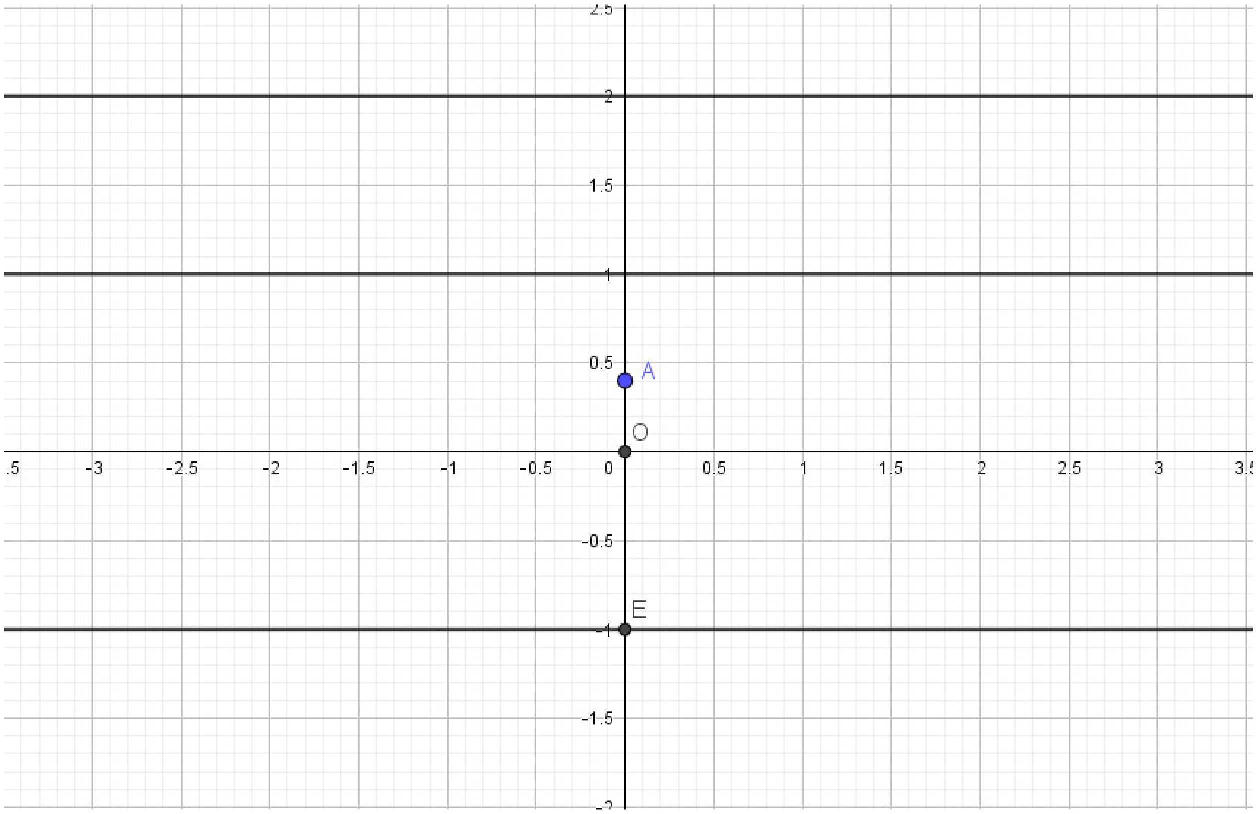
$$\begin{cases} b = \dfrac{2-h}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(2-h) \\ c = \dfrac{h+1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(h+1) \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b = \dfrac{2-h}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}(2-h) \\ c = \dfrac{h+1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}(h+1) \end{cases}$$

Ainsi $B\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}(2-h),0\right)$ et $C\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}(1+h),1\right)$ ou $B'\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}(2-h),0\right)$ et $C'\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}(1+h),1\right)$

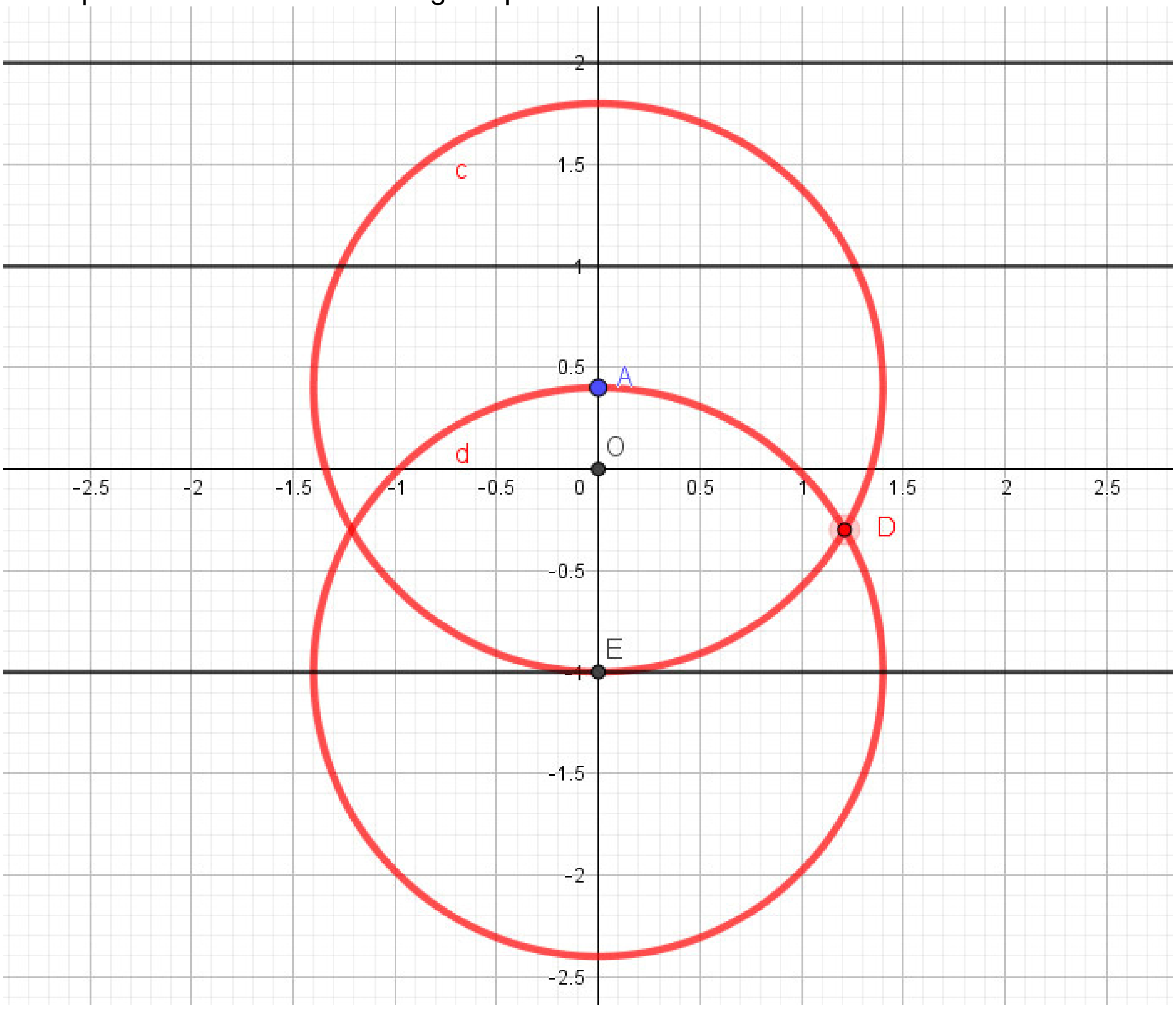
Conclusion

Pour tout point A de la droite à l'intérieur on peut construire deux triangles équilatéraux ABC et AB'C' symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

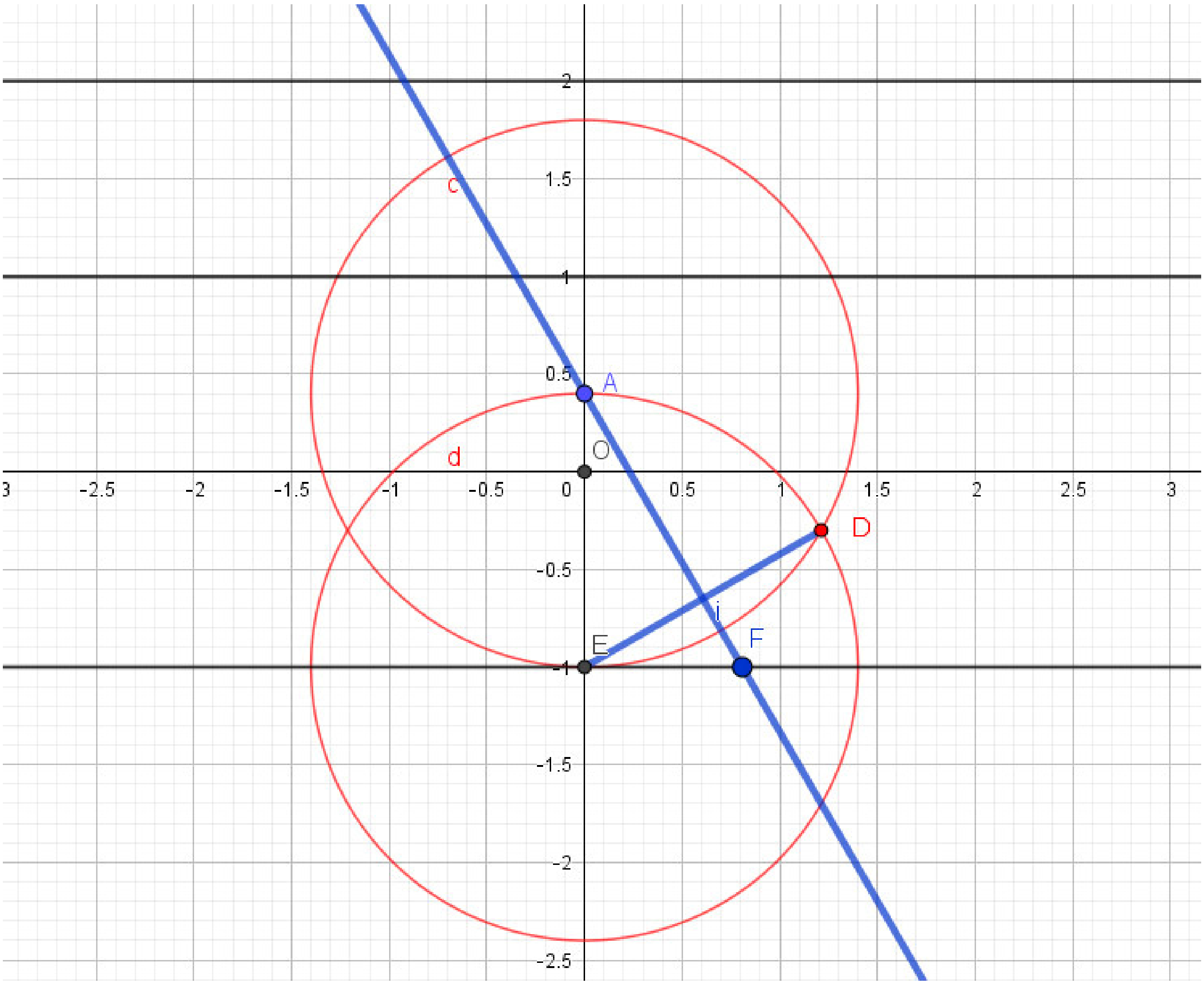
Maintenant on trace à la règle et au compas.
On commence par tracer les droites y=-1, y=0, y=1, y=2 et on place les points $A(0,h)$ et $E(0,-1)$



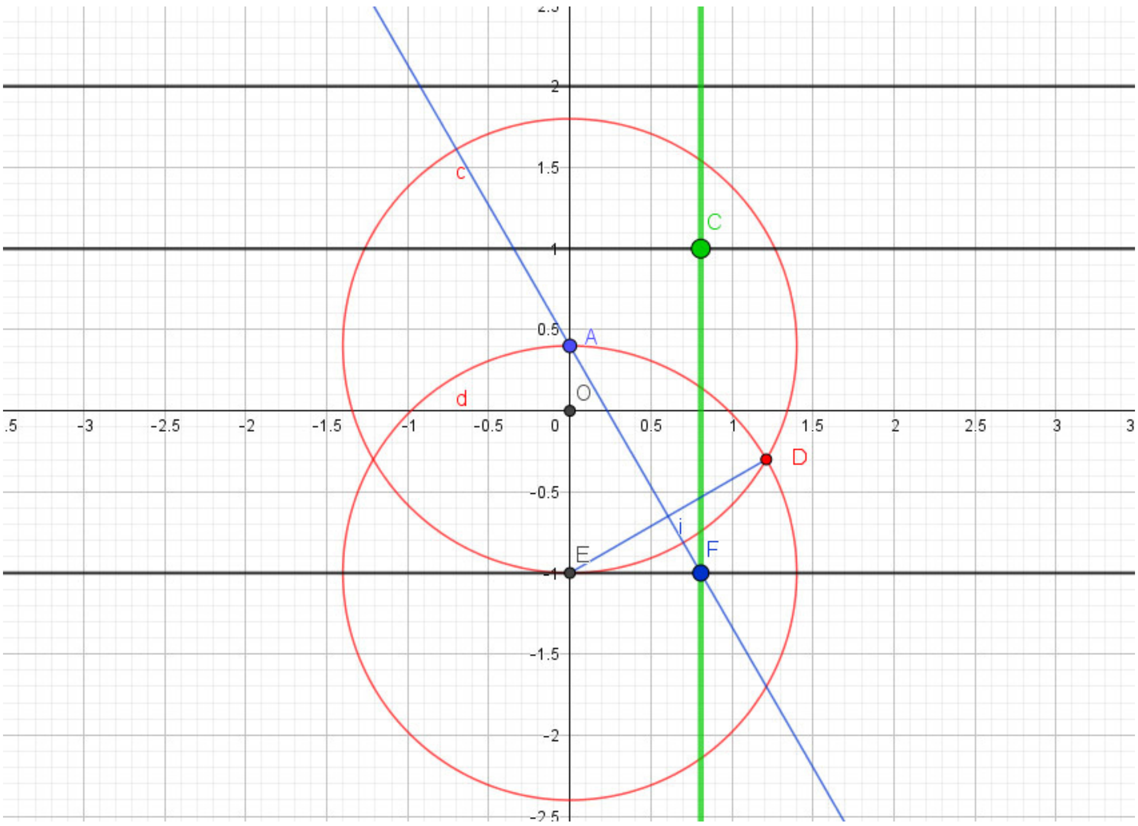
On trace le cercle de centre A passant par E de rayon $1+h$ et celui de centre E passant par A. ils se coupent au point D et AED est un triangle équilatéral de côté $1+h$.



On trace la médiatrice de $[ED]$, elle coupe y=-1 au point $F\left((1+h)\times tan\dfrac{\pi}{6},-1\right)$ soit $F\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}(1+h),-1\right)$



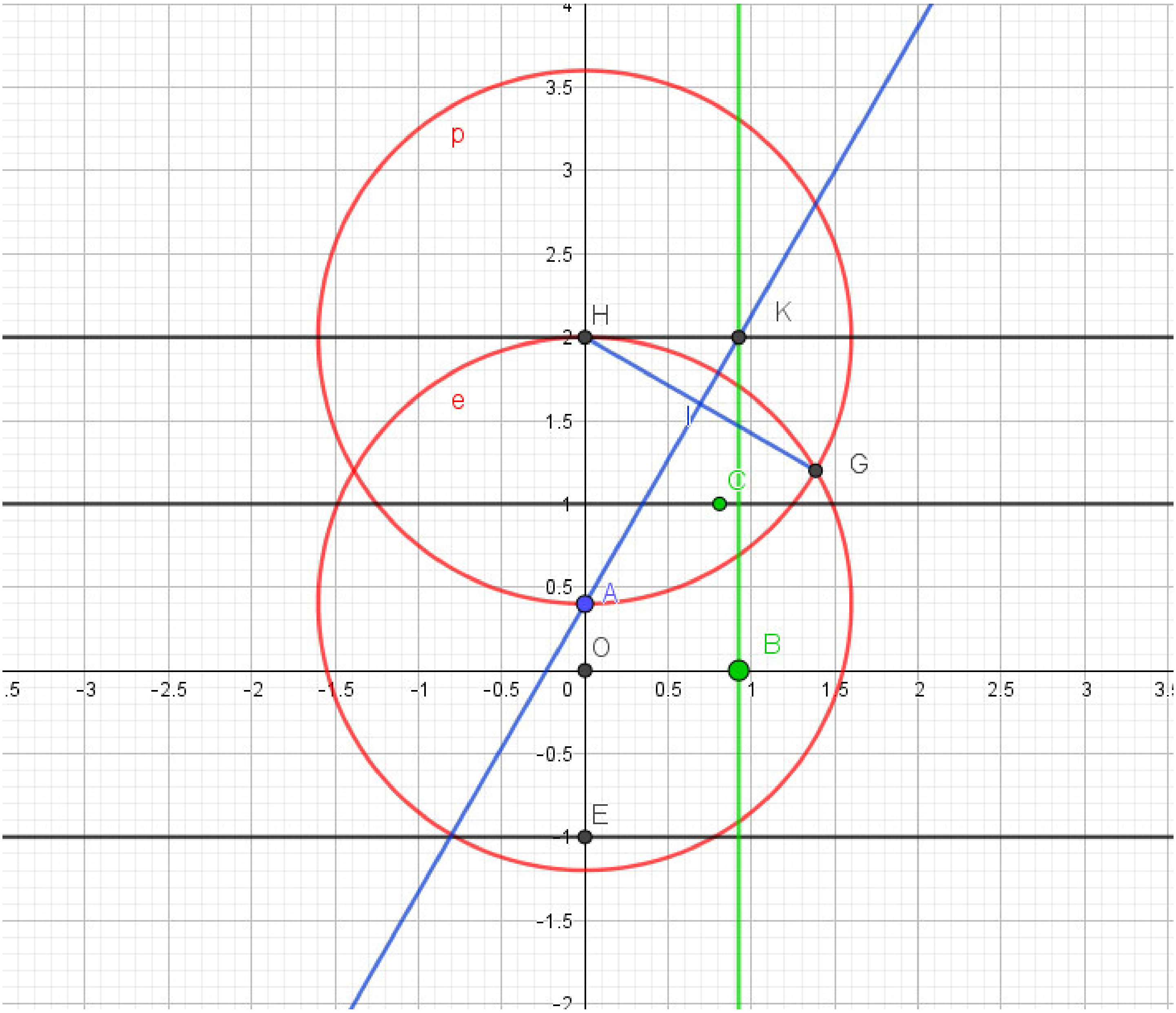
La perpendiculaire à y=-1 au point F coupe y=1 au point $C\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}(1+h),1\right)$



De façon similaire on construit le point B.
On trace les cercles de centre A passant par $H(0{,}2)$ et celui de centre H passant par A. Ils sont de rayon $2-h$. Ils se coupent en G formant le triangle équilatéral AGH de côté $2-h$.

On trace la médiatrice de $[HG]$, elle coupe y=2 au point $K\left((2-h)\times tan\frac{\pi}{6},2\right)$ soit $K\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2-h),2\right)$

La perpendiculaire à y=2 passant par K coupe y=0 au point $B\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2-h),0\right)$



Et voilà