Apour

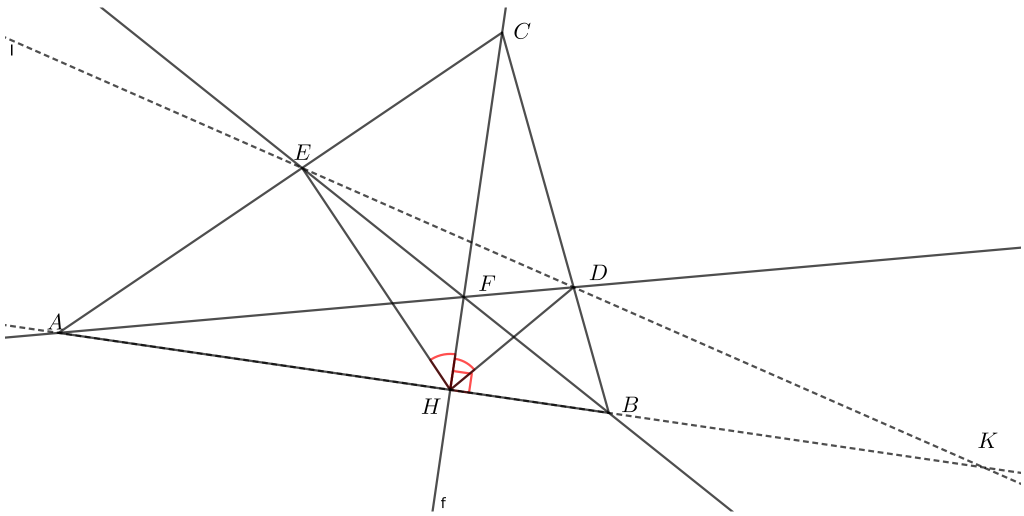
AU FIL DES MATHS, problème 535-4

Jacques MAROT

13 avril 2020

Résumé

En feuilletant plus assidument que d'habitude (confinement oblige) la revue « AU FIL DES MATHS », la figure du problème 535-4 m'a accroché, car il m'a semblé y voir la construction du conjugué harmonique par rapport à $\{A, B\}$ d'un point quelconque H sur (AB), qui donne ci-dessous toujours le même point K, quelque soit le choix des point C et F.



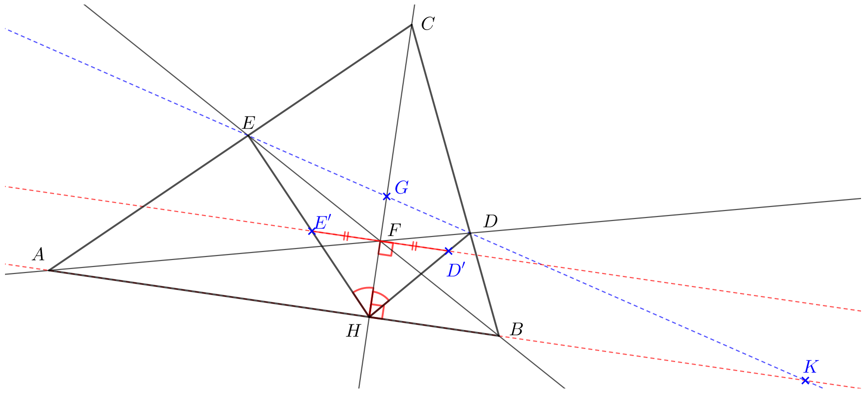
En y regardant de plus près, je fus surpris de constater que la question posée concernait des notions euclidiennes, d'angles, bissectrices et hauteur d'un triangle : il fallait montrer que $\widehat{DHC} = \widehat{CHE}$, alors que la notion de division harmonique est de nature purement affine. Les birapports et la division harmonique en particulier, concernent plus précisément la géométrie de la droite projective, leur étude était fort heureusement restreinte à la droite affine pour l'élève de troisième que j'étais en 1968. À l'époque, ce cours sur la géométrie peu riche de la droite me semblait manquer d'intérêt, pour cause, ce n'est qu'en géométrie projective en considérant plusieurs droites distinctes plongées dans un espace de dimension plus grande, que la notion de division harmonique prend tout son intérêt [1]. Elle permet d'envisager dans un plan la notion de faisceau harmonique de 4 droites, notion que j'ai rencontrée bien plus tard en préparant CAPES et agrégation, car entre temps le tsunami des maths dites « modernes », avait balayé la géométrie classique de ses programmes : « À bas Euclide » disait Jean Dieudonné qui ne jurait que par algèbre linéaire et espaces vectoriels [2] à tous les étages. Cependant, voila un petit problème de géométrie, qui me semble bien difficile à résoudre sans le regard d'un géomètre, qui au siècle passé a entendu parler de faisceau harmonique, notion qui permet dans le cas présent de répondre simplement à une question pourtant de nature euclidienne.

1. Puisque plus généralement les morphismes d'espace projectif (homographies) conservent le birapport de 4 points alignés, qui dans le cas particulier de la division harmonique est égal à -1
2. Même la notion d'espace affine n'avait pas grâce à ses yeux.

Table des matières

1 Solution du problème posé

Le point K à l'intersection de (DE) et (AB) est le conjugué harmonique de H par rapport à $\{A, B\}$, le quadruplet de droites $((CA), (CB), (CH), (CK))$ constitue donc un faisceau harmonique issu du point C, Ce faisceau détermine sur la sécante (DE) le quadruplet de points (E, D, G, K) qui présente donc comme (A, B, H, K) une disposition harmonique. On obtient donc un deuxième faisceau harmonique issu de H, concernant les droites (HE), (HD), (HC), (HK). L'intersection de cet autre faisceau avec la droite d parallèle à (AB) passant par F, détermine le quadruplet de points (E', D', F, K') présentant lui aussi une disposition harmonique, mais K' est le point à l'infini de d, F est donc le milieu de $[D'E']$.



Puisque (CH) est supposée être perpendiculaire à (AB) (c'est là qu'intervient la structure euclidienne), cette droite est aussi perpendiculaire à $(D'E')$, (CH) est donc la médiatrice de $[D'E']$ qui est aussi bissectrice de $\widehat{EHD}$.

Je n'ai pas cherché de preuve qui ne ferait pas appel à la conjugaison harmonique, j'imagine qu'une démonstration par l'analytique est possible, la nature euclidienne du résultat observé apparait au moment du choix d'un repère cartésien **orthogonal** tel que $\left(H, \overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HF}\right)$, les droites (HE) et (HD) ont nécessairement dans ce repère des coefficients directeurs opposés. Mais j'en suis rester par paresse à ce raisonnement sans calcul, et je ne peux résister au plaisir de me replonger dans la géométrie qu'on m'enseignait dans les années 60, pour montrer l'intérêt qu'il y aurait à ne pas limiter nos programmes actuels d'enseignement de la géométrie à de l'analytique [3], et me permet pour cela d'effectuer ce petit rappel (à moins que ce soit une initiation) sur la notion de division harmonique.

2 Conjugaison harmonique

2.1 Définition

Étant donné une droite d et deux points distincts A et B à distance finie sur cette droite, on cherche les points $M \in d$ tels que le rapport des distances $\dfrac{MA}{MB}$ soit un réel k strictement positif. En utilisant

3. Voir à ce propos le plaidoyer de Daniel Perrin datant de 2012 et encore cruellement d'actualité : http://www.univ-irem.fr/IMG/pdf/Annexe_1b-CS-IREM-8_juin_2012.pdf

plus précisément des mesures algébriques, on voit apparaitre deux possibilités : $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = k$ ou $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -k$, ce qui se traduit vectoriellement par $\overrightarrow{MA} \pm k\overrightarrow{MB} = \vec{0}$, on obtient donc deux points :

- le barycentre de $(A, 1)$ et (B, k) que nous désignerons par H, il appartient au segment $[AB]$ puisque k est supposé positif ;
- le barycentre de $(A, 1$ et $(B, -k)$ que nous désignerons par K :
  - si $k = 1$, en géométrie affine classique le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, -1)$ n'est pas utilisable, on doit faire appel aux notions de géométrie projective et considérer qu'il s'agit du point à l'infini de la droite (AB), il est caractérisé par ses coordonnées barycentriques dans le repère affine (A, B), proportionnelles à $(1, -1)$;
  - si $k \neq 1$, ce point est à distance finie, si $k > 1$, il se situe à l'extérieur du segment $[AB]$ sur la demi-droite $[AB)$, sinon il est sur la demi-droite $[BA)$ lorsque $k \in]0 ; 1[$.

Ces deux points H et K sont dits conjugués harmoniques l'un de l'autre par rapport à la paire $\{A, B\}$, On peut considérer que A et B sont conjugués harmonique d'eux-mêmes, il s'agit d'un prolongement par continuité, car le barycentre de $(A, 1)$ et (B, k) se confond avec A lorsque k tend vers 0, ou B lorsque k tend vers l'infini. Le conjugué du milieu de $[AB]$ est le point à l'infini de la droite (AB), tous les autres points à distance finie ont un conjugué harmonique à distance finie. Lorsque tous ces points sont distincts et à distance finie, on a aussi cette égalité $\dfrac{\overline{KB}}{\overline{HB}} = -\dfrac{\overline{KA}}{\overline{HA}}$, qui montre que A et B sont conjugués harmoniques l'un de l'autre par rapport à la paire $\{H, K\}$. Ces remarques permettent d'adopter la définition suivante.

Définition 1 *Étant donné une droite d munie d'un point à l'infini, et deux points A et B distincts sur cette droite, la conjugaison harmonique sur d par rapport à A et B, est l'application involutive* $\mathscr{C}_{\{A,B\}} : \begin{array}{ccc} d & \longrightarrow & d \\ H & \longmapsto & K \end{array}$ *telle que :*

- *si $\{A, B\}$ est une paire de points à distance finie et si H admet pour coordonnées barycentriques (α, β) dans le repère affine (A, B), alors K admet dans le même repère les coordonnées $(\alpha, -\beta)$;*
- *si B est le point à l'infini de la droite d et A un point à distance finie sur d, $\mathscr{C}_{\{A,B\}}$ est la symétrie de centre A, prolongée de manière que B soit son propre conjugué.*

2.2 Construction géométrique d'un conjugué harmonique

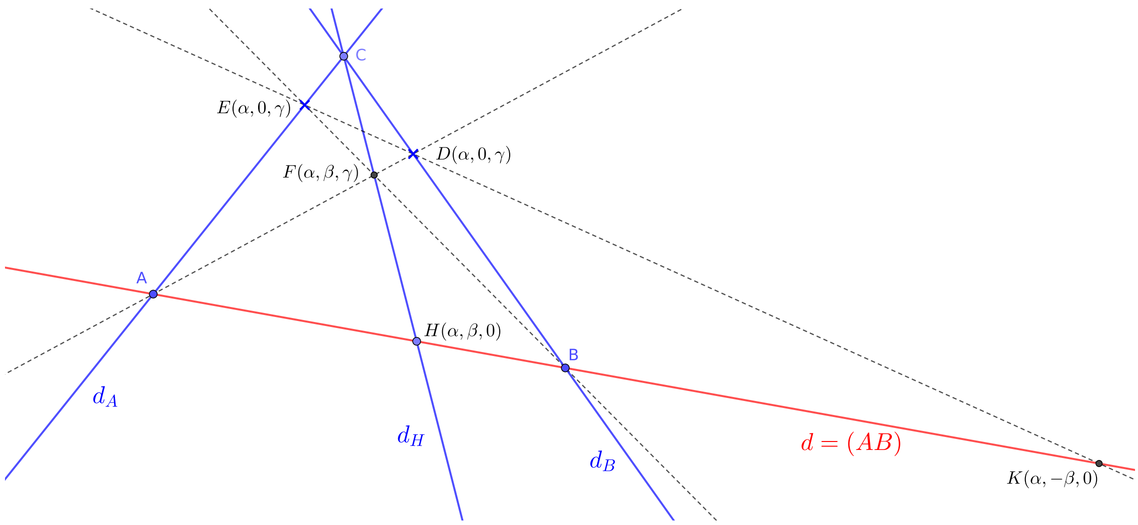


Figure 1 – Construction de K conjugué harmonique de H par rapport à A et B avec 3 droites concourantes.

Pour construire le conjugué harmonique par rapport à $\{A, B\}$ du point H sur la droite $d = (AB)$, on utilise un faisceau de droites d_A, d_H, et d_B passant respectivement pat A, H et B, ces trois droites ayant en commun un point C extérieur à d (voir figure 1). Il est tout à fait possible d'envisager que ce point C soit un point à l'infini commun à d_A, d_H, et d_B lorsque celles-ci sont parallèles, (voir figure 2). Lorsque A, B et C sont trois points non alignés à distance finie, nous pouvons utiliser des coordonnées barycentriques par rapport au repère affine (A, B, C) ; toutes les équations et coordonnées exprimées par la suite le seront dans ce repère affine. Soit (α, β, γ) des coordonnées barycentriques de $F \in (HC)$, le point H est barycentre partiel de (A, α) et (B, β), H admet donc le couple (α, β) pour coordonnées barycentriques dans le référentiel (A, B), elles sont dépendantes de la seule position de H sur la droite (AB), puisqu'elles doivent être proportionnelles à $(\overline{HB}, \overline{AH})$. Il nous suffira de constater que K admet les coordonnées barycentriques $(\alpha, -\beta, 0)$, pour vérifier que le point K obtenu ci-dessus est bien le conjugué harmonique de H par rapport à $\{A, B\}$; ce qui prouvera que cette construction ne dépend donc ni du point C, ni du choix du point F choisi sur (HC) en étant différent de H et C.

Le point E à l'intersection de (BF) et (CA) admet les coordonnées $(\alpha, 0, \gamma)$, car il est barycentre partiel de (A, α) et (C, γ), de même le point D à l'intersection de (AF) et (BC) est barycentre partiel de (B, β) et (C, γ), il admet donc les coordonnées $(0, \beta, \gamma)$. On en déduit l'équation en coordonnées barycentriques de la droite (DE) : $\begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha & 0 & \gamma \\ 0 & \beta & \gamma \end{vmatrix} = -\beta\gamma x - \alpha\gamma y + \alpha\beta z = 0$. L'équation de la droite (AB) est $z = 0$, le point K à l'intersection des droites (DE) et (AB) admet donc des coordonnées $(x, y, 0)$, qui doivent vérifier l'équation $-\beta\gamma x - \alpha\gamma y = 0$. Le couple $(\alpha, -\beta)$ en est une solution évidente, comme attendu, K est donc bien barycentre de (A, α) et $(B, -\beta)$.

Lorsque les droites d_A, d_H et d_B sont parallèles, elles ont en commun un point à l'infini C qui ne peut plus être utilisé dans un repère affine permettant d'exprimer des coordonnées barycentriques. Nous utiliserons donc le repère affine (A, B, F) ; dans celui-ci les points $H(\alpha, \beta, 0)$ et $F(0, 0, 1)$ vérifient l'équation de droite $\beta x - \alpha y = 0$, les coordonnées $(\alpha, \beta, -\alpha - \beta)$ de somme nulle vérifient aussi cette équation, elles peuvent donc être affectées au point C à l'infini de la droite d_H. La droite d_A admet l'équation $(\alpha + \beta)y + \beta z = 0$ car $A(1, 0, 0)$ et $C(\alpha, \beta, -\alpha - \beta)$ vérifient cette équation, le point E à l'intersection de d_A et (BF) d'équation $x = 0$ admet donc les coordonnées $(0, \beta, -\alpha - \beta)$. De même, la droite d_B admet l'équation $(\alpha + \beta)x + \alpha z = 0$, vérifiée par $B(0, 1, 0)$ et $C(\alpha, \beta, -\alpha - \beta)$, le point D à l'intersection de d_B et (AF) d'équation $y = 0$ admet donc les coordonnées $(\alpha, 0, -\alpha - \beta)$. On en en déduit une équation de la droite (DE) : $\begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha & 0 & -\alpha - \beta \\ 0 & \beta & -\alpha - \beta \end{vmatrix} = 0$, son intersection avec la droite (AB) a donc des coordonnées $(x, y, 0)$ qui doivent vérifier l'équation $(\alpha + \beta)(\beta x + \alpha y) = 0$. Le point K auquel on aboutit est donc encore le conjugué harmonique de H par rapport à $\{A, B\}$, puisque dans le repère affine (A, B, F), il admet les coordonnées barycentriques $(\alpha, -\beta, 0)$ solution de cette équation.

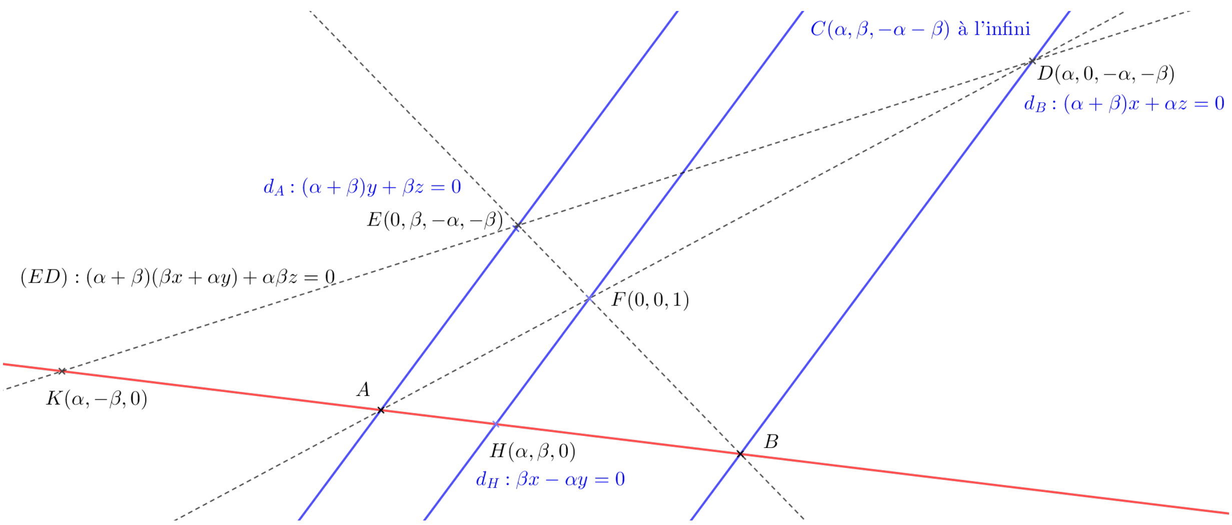


FIGURE 2 – Construction de K conjugué harmonique de H par rapport à $\{A, B\}$ avec trois droites parallèles.

Dans les deux cas de figure que nous venons d'envisager, la droite (DE) peut être parallèle à d, auquel cas le point K semble ne pas pouvoir être construit, car on obtient dans ce cas le point de coordonnées barycentriques $(\alpha, -\alpha, 0)$. En géométrie projective il s'agit du pont l'infini de la droite d, c'est le conjugué harmonique du milieu de $[AB]$, isobarycentre de (A, α) et (B, α). Ces cas particuliers sont illustrés par la figure 3, des démonstrations n'utilisant que le théorème de Thalès permettent de vérifier que H est bien milieu de $[AB]$ lorsque $d//(AB)$.

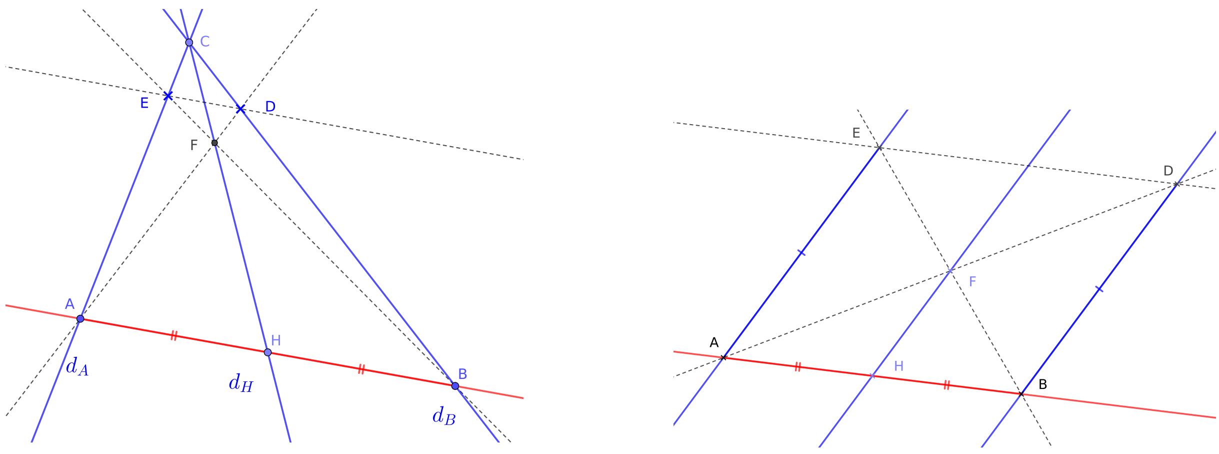


FIGURE 3 – Le milieu de $[AB]$ et le point à l'infini commun aux parallèles (AB) et (DE) sont conjugués par rapport à $\{A, B\}$.

3 Faisceau harmonique de quatre droites

Nous dirons qu'un quadruplet de points alignés (A, B, H, K) présente une disposition harmonique, lorsque la paire $\{H, K\}$ et la paire $\{A, B\}$ sont conjuguées harmoniques ; il faut être attentif à l'ordre dans lequel sont énoncés les points, avec tout de même quelques libertés, car si K est conjugué harmonique de H par rapport à $\{A, B\}$; il apparait immédiatement d'après la définition de la conjugaison harmonique, que le quadruplet peut être énoncé dans n'importe lequel des 7 autres ordres suivants : (B, A, H, K), (A, B, K, H), (B, A, K, H), (H, K, A, B), (K, H, A, B), (H, K, B, A) ou (K, H, B, A). Nous appellerons faisceau harmonique, un quadruplet de droites parallèles ou concourantes (d_1, d_2, d_3, d_4), qui passent par les quatre points (M_1, M_2, M_3, M_4) d'un quadruplet présentant une disposition harmonique, avec $M_i \in d_i$ pour tout $i \in \{1; 2; 3; 4\}$. Lorsque nous sommes en présence d'un faisceau harmonique de 4 droites parallèles, une application immédiate du théorème de Thalès, permet de voir que ce faisceau intercepte toute sécante selon quatre points présentant une disposition harmonique. L'intérêt de la notion de division harmonique qui nous a servi à résoudre le problème posé, est le théorème que nous voulons redémontrer ici, qui affirme qu'il en est de même pour un faisceau de droites concourantes. Il est le corollaire d'un théorème plus général concernant la conservation du birapport de 4 points, mais on aura une démonstration légèrement simplifiée pour un quadruplet qui présente une disposition harmonique, lorsque leur birapport $\dfrac{\overline{HA}}{\overline{HB}} : \dfrac{\overline{KA}}{\overline{KB}}$ est égal à -1.

THÉORÈME 1 *Soit un faisceau (d_1, d_2, d_3, d_4) de 4 droites distinctes ayant en commun un point C qui peut être à l'infini si celles-ci sont parallèles, considérons une cinquième droite interceptée par ce faisceau selon le quadruplet de points (M_1, M_2, M_3, M_4) tels que $d \cap d_i = \{M_i\}$ pour tout $i \in \{1; 2; 3; 4\}$. Si (M_1, M_2, M_3, M_4) présente une disposition harmonique, alors sur toute autre droite ne passant pas par C, ce faisceau détermine quatre points d'intersection distincts qui présentent eux aussi une disposition harmonique.*

Un faisceau de quatre droites distinctes respectant les hypothèses de ce théorème sera appelé un faisceau harmonique, on voit donc qu'un tel faisceau, permet d'engendrer à partir d'un quadruplet particulier, une infinité de quadruplets de droites ou de points ayant les mêmes propriétés, on dit que l'on transporte la disposition harmonique d'une droite à une autre par l'intermédiaire du faisceau. C'est ce qui nous a permis de résoudre très rapidement le petit problème posé au début.

Comme déjà évoqué, lorsque nous sommes en présence d'un faisceau harmonique de 4 droites parallèles, ce théorème est une application immédiate du théorème de Thalès. Dans le cas d'un faisceau harmonique de droites concourantes en un point C à distance finie, nous utiliserons le lemme intermédiaire suivant, qui reprend les hypothèses du théorème dans une configuration particulière.

Lemme 1 *Étant donné un faisceau harmonique de droites concourantes en un point à distance finie, toute parallèle stricte à l'une des quatre droites du faisceau, coupe les trois autres en des points distincts à distance finie, dont l'un est le milieu des deux autres.*

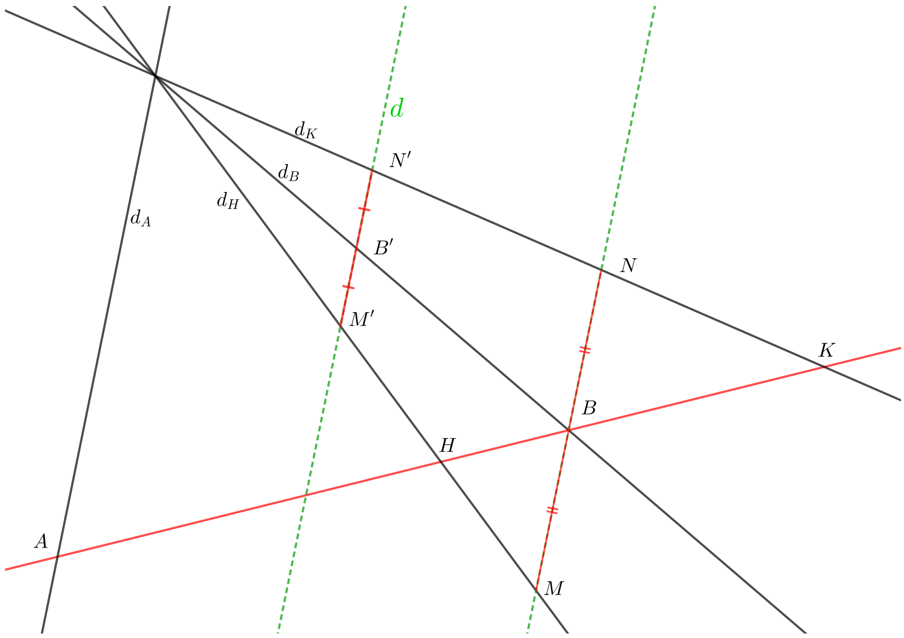


Figure 4 – Illustration du lemme

Soit (A, B, H, K) un quadruplet particulier constitué de points distincts à distance finie, présentant une disposition harmonique, qui permet de mettre en évidence que le quadruplet (d_A, d_B, d_H, d_K) de droites concourantes en C est un faisceau harmonique. Soit d une cinquième droite strictement parallèle à d_A, on trace par B une parallèle à d qui coupe d_H en M et d_K en N, d'après le théorème de Thalès on a :

$$\frac{\overline{HA}}{\overline{HB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BM}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{KA}}{\overline{KB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BN}}$$

Par définition de la conjugaison harmonique par rapport à $\{A, B\}$, ces rapports sont opposés et par conséquent $\overline{BM}$ et $\overline{BN}$ le sont aussi, B est donc milieu de $[MN]$. Soit B' le point d'intersection de d et (CB), la parallèle à (MN) passant par B' qui est la droite d est donc l'image de (MN) par l'homothétie h de centre C et rapport $k = \dfrac{\overline{CB'}}{\overline{CB}}$, on en déduit que $M' = h(M)$ et $N' = h(N)$ sont respectivement les points d'intersection de d avec d_H et d_K, puisque les milieux sont conservés par homothétie [4], on en déduit que B' est le milieu de $[M'N']$.

4. De manière générale, les barycentres sont conservés par toute application affine, cela permettrait de démontrer que le birapport d'un quadruplet quelconque (A, B, H, K) égal à $\dfrac{\overline{HA}}{\overline{HB}} : \dfrac{\overline{KA}}{\overline{KB}}$ est aussi égal à $\dfrac{\overline{BN}}{\overline{BM}} = \dfrac{\overline{B'N'}}{\overline{B'M'}}$.

Le théorème est donc démontré dans la situation particulière où le faisceau harmonique est constitué de droites concourantes et que la dernière droite invoquée dans les hypothèses du théorème est parallèle à l'une des droites du faisceau. Sinon, dans la situation représentée en figure 5 avec une droite Δ sécante aux quatre droites du faisceau harmonique, le lemme nous permet de montrer que si (H, K, A, B) est un quadruplet qui présente une disposition harmonique, alors le quadruplet (H', K', A', B') sur Δ présente lui aussi une disposition harmonique. On peut en effet appliquer le théorème de Thalès après avoir tracer la parallèle à d_A passant par B' :

$$\frac{\overline{H'A'}}{\overline{H'B'}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{M'B'}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{K'A'}}{\overline{K'B'}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{N'B'}}$$

Puisque le lemme permet d'affirmer que B' est le milieu de $[M'N']$, on voit que les rapports ci-dessus sont opposés, et que par conséquent H' et K' sont bien conjugués harmoniques par rapport à $\{A, B\}$.

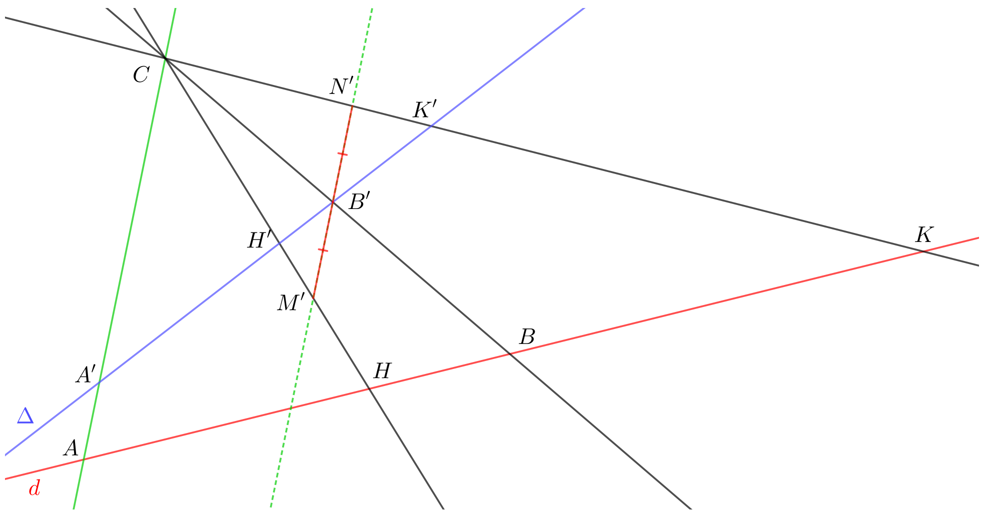


Figure 5 – Transport de la disposition harmonique de d vers Δ.