537-3 Deux équations diophantienne

Pour les deux équations, qui sont homogènes, il suffit de chercher les solutions (x, y, z) primitives, où x, y, z sont premiers entre eux.

Les autres solutions seront alors de la forme (kx, ky, kz), où k est un entier et (x, y, z) est une solution primitive.

1) Solutions primitives de l'équation $x^2 + y^2 = 31 \cdot z^2$

Parmi les trois nombres x, y, z un et un seul est pair.

Si le nombre pair est z, alors : $\begin{cases} x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod{4} \\ 31 \cdot z^2 \equiv 0 \pmod{4} \end{cases}$

Si le nombre pair est x ou y, alors : $\begin{cases} x^2 + y^2 \equiv 1 \pmod{4} \\ 31 \cdot z^2 \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$

L'équation $x^2 + y^2 = 31 \cdot z^2$ n'a donc pas de solution en nombres entiers.

2) Solutions primitives de l'équation $x^2 + y^2 = 29 \cdot z^2$

On va utiliser l'anneau **Z**(i) des entiers de Gauss qui est euclidien.

La décomposition du nombre 29 en éléments irréductible est : $29 = (5 + 2 \cdot i) \cdot (5 - 2 \cdot i)$

Le premier membre de l'équation est : $(x + y \cdot i) \cdot (x - y \cdot i)$

Quitte à changer le signe de y, on peut supposer que $5 + 2 \cdot i$ divise $x + y \cdot i$

Donc : $x + y \cdot i = (5 + 2 \cdot i) \cdot (u + v \cdot i) = (5u - 2v) + (2u + 5v) \cdot i$ avec $u^2 + v^2 = z^2$

Le triplet (u, v, z) est un triplet pythagoricien primitif.

On sait qu'il existe des entiers α et β, premiers entre eux, de parités distinctes, tels qu'on ait, aux signes de u, v, z près et à l'échange de u et v près :

$$\begin{cases} u = \alpha^2 - \beta^2 \\ v = 2\alpha\beta \\ z = \alpha^2 + \beta^2 \end{cases}$$

On en déduit x, y, z, aux signes de x, y, z près et à l'échange de x et y près :

$$\begin{cases} x = 5\alpha^2 - 5\beta^2 - 4\alpha\beta \\ y = 2\alpha^2 - 2\beta^2 + 10\alpha\beta \\ z = \alpha^2 + \beta^2 \end{cases}$$

Il reste à voir si la solution (x, y, z) est bien primitive.

On remarque que : $5y - 2x = 58 \cdot \alpha\beta$

Soit p un facteur premier commun à x, y, z.

Alors p diviserait $58 \cdot \alpha\beta$

Si p divise l'un des deux nombres α ou β, alors il divise aussi l'autre puisqu'il divise $z = \alpha^2 + \beta^2$
Ceci est impossible puisque α et β sont premiers entre eux.

La valeur $p = 2$ est impossible aussi car y est pair et z est impair.

Il reste donc à écarter la valeur $p = 29$:

On remarque que : $\begin{cases} y + 2z = 2\alpha \cdot (2\alpha + 5\beta) \\ 2y = (2\alpha + 5\beta)^2 - 29 \cdot \beta^2 \end{cases}$

Les nombres x, y, z sont tous trois divisibles par 29 si $2\alpha + 5\beta$ est divisible par 29.

Il faut donc éviter que : $\alpha \equiv 12 \cdot \beta \pmod{29}$