537-4 Une fonction homographique particulière

Quitte à retrancher aux fonctions homographiques majorant g une constante positive, on peut se ramener aux fonctions homographiques tangentes au graphe de g en un point d'abscisse u.

Soit f la fonction homographique définie par : $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$, avec c>0.

1) Etude du cas u=0

$$f'(x)=\frac{ac-b}{(x+c)^2}$$

$$\begin{cases} f(0)=\dfrac{b}{c}=g(0)=1 \\ f'(0)=\dfrac{ac-b}{c^2}=g'(0)=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Donc : $b=c=2\cdot(1-a)$, avec a<1 et $f(x)=\dfrac{ax+2(1-a)}{x+2(1-a)}$

Soit : $\varphi(x)=x\cdot\left(f(x)-g(x)\right)=x\cdot\dfrac{ax+2(1-a)}{x+2(1-a)}-\ln(x+1)$

On veut que $\varphi(x)\geq 0$

$$\varphi'(x)=f(x)+x\cdot f'(x)-\frac{1}{x+1}=\frac{ax+2(1-a)}{x+2(1-a)}-\frac{2(1-a)^2\cdot x}{\left(x+2(1-a)\right)^2}-\frac{1}{x+1}$$

$$(x+1)\cdot\left(x+2(1-a)\right)^2\cdot\varphi'(x)=x^2\cdot\left(ax+(1-a)\cdot(4a-1)\right)$$

Si $a<\dfrac{1}{4}$, alors φ' est négative, donc φ décroît et est négative.

Donc : $\dfrac{1}{4}\leq a<1$

Si $a\leq a'$, alors $\dfrac{ax+2(1-a)}{x+2(1-a)}-\dfrac{a'x+2(1-a')}{x+2(1-a')}=\dfrac{(a-a')\cdot x^2}{\left(x+2(1-a)\right)\cdot\left(x+2(1-a')\right)}\leq 0$

C'est pour $a=\dfrac{1}{4}$ qu'on obtient la fonction homographique minimale parmi celles qui dominent f et dont le graphe est tangent à celui de f au point d'abscisse 0.

Il s'agit de la fonction : $f(x)=\dfrac{x+6}{4x+6}$

2) Etude d'un exemple dans le cas u=1

$$\begin{cases} f(1) = \dfrac{a+b}{c+1} = g(1) = \ln(2) \\ f'(1) = \dfrac{ac-b}{(c+1)^2} = g'(1) = \dfrac{1}{2} - \ln(2) \end{cases}$$

On en déduit a et b en fonction de c : $\begin{cases} a = \dfrac{c+1}{2} - c \cdot \ln(2) \\ b = 2c \cdot \ln(2) - \dfrac{c+1}{2} + \ln(2) \end{cases}$

En choisissant $c = 1$, on obtient : $\begin{cases} a = 1 - \ln(2) \\ b = 3 \cdot \ln(2) - 1 \end{cases}$ et $f(x) = \dfrac{(1-\ln(2)) \cdot x + 3\ln(2) - 1}{x+1}$

$$\varphi(x) = x \cdot (f(x) - g(x)) = x \cdot \frac{(1-\ln(2)) \cdot x + 3\ln(2) - 1}{x+1} - \ln(x+1)$$

$$\varphi'(x) = f(x) + x \cdot f'(x) - \frac{1}{x+1} = \frac{(1-\ln(2)) \cdot x + 3\ln(2) - 1}{x+1} - \frac{(2 - 4 \cdot \ln(2)) \cdot x}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1}$$

$$(x+1)^2 \cdot \varphi'(x) = (x-1) \cdot ((1-\ln(2)x + 2 - 3 \cdot \ln(2))$$

Le tableau de variation de la fonction montre que : $\varphi(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$

La fonction f majore donc la fonction g.

3) Conclusion

Si l'ensemble E des fonctions homographiques majorant g admet un plus petit élément, cet élément ne peut être que la fonction du paragraphe 1)

Or si f_1 désigne la fonction du paragraphe 2), on obtient :

$$f_1(x) - f_0(x) = \frac{(x-3) \cdot ((3 - 4 \cdot \ln(2)) \cdot x + 4 - 6 \cdot \ln(2))}{(4 \cdot x + 6) \cdot (x+1)}$$

Et cette différence est négative si : $\dfrac{6 \cdot \ln(2) - 4}{3 - 4 \cdot \ln(2)} < x < 3$

Donc l'ensemble E n'a pas d'élément minimal.