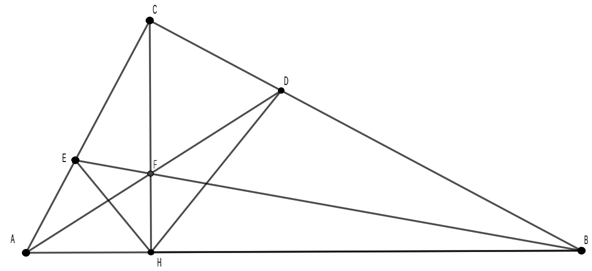
Problème de l'APMEP n° 535-4
Solutions et commentaires de Marc Roux

ABC est un triangle, H est le pied de la hauteur issue de C,E est un point du côté [AC] et D un point du côté [BC] tels que les segments [EB] et [DA] se coupent sur la hauteur (CH) en un point F.
Montrer que la hauteur (CH) se trouve alors être la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{EHD}$



1. <u>Solution analytique</u>. Cette solution est sans difficulté, elle peut être mise à la portée de lycéens, voire de collégiens si les programmes actuels le permettent, en introduisant des questions intermédiaires :

On pose AH = a, BH = b, CH = c, HF = f. On choisit le repère orthonormé direct d'origine H dont le premier axe est porté par (AB), sens positif de A vers B

a) Donner les coordonnées de H, A, B, C, F
Réponse : H(0,0) ; A(-a,0) ; B(b,0) ; C(0, c) ; F(0, f)

b) Trouver une équation de chacune des droites (AC), (BC), (AF), (BE)
Réponses : (AC) : $y=\frac{c}{a}x+c$ *; BC :* $y=\frac{-c}{b}x+c$ *; (AF) :* $y=\frac{f}{a}x+f$ *; (BF) :* $y=\frac{-f}{b}x+f$

c) Calculer les coordonnées de E et de D.
Réponses : en écrivant que E appartient à (AC) et à (BF), et que D appartient à (BC) et à (AF) on trouve
$x_E=\frac{ab(f-c)}{bc+af}$ *et* $x_D=\frac{ab(c-f)}{fb+ca}$ *;*
on reporte ces valeurs dans l'une des équations de droites, et il vient :
$y_E=\frac{cf(b+a)}{bc+af}$ *et* $y_D=\frac{cf(b+a)}{fb+ca}$

d) Déterminer une équation de chacune des droites (HE) et (HD)
Réponses : (HE) : $y=\frac{cf(b+a)}{ab(f-c)}x$ *; (HD) :* $y=\frac{cf(b+a)}{ab(c-f)}x$

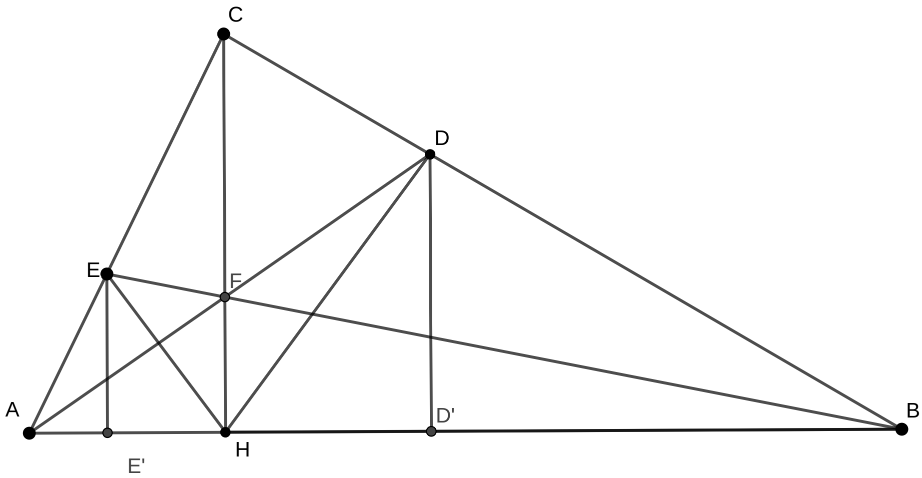
e) Conclure
Réponse : (HE) et (HD) ont des coefficients directeurs opposés et passent par l'origine H, donc elles sont symétriques par rapport à l'axe (HC), et donc (HC) est la bissectrice

intérieure de l'angle $\widehat{EHD}$

2. <u>Solution par les rapports de longueurs</u>.

En fait cette solution est "calquée" sur la solution analytique, sans employer de repère ni de coordonnées. Le fait qu'elle soit nettement plus compliquée que la précédente illustre la puissance de simplification de la géométrie analytique. Chercher une solution de géométrie "pure" (comme je l'ai fait pendant de longues journées de confinement) relève moins de la recherche d'efficacité que du sport cérébral, du goût du défi, et de l'intérêt pour l'histoire des mathématiques, où bien des choses se sont passées avant l'invention de l'outil analytique.

On rajoute à la figure les points E' et D', projetés orthogonaux respectifs de E et D sur (AB) :



Nous allons montrer l'égalité des angles $\widehat{EHA}$ *et* $\widehat{DHB}$ *, et pour cela montrer l'égalité de leurs tangentes, qui sont respectivement* $\dfrac{EE'}{HE'}$ *et* $\dfrac{DD'}{HD'}$

a) On a $\dfrac{EE'}{AE'}=\dfrac{CH}{AH}$, d'où $EE'=\dfrac{CH.AE'}{AH}=\dfrac{CH(AH-E'H)}{AH}=\dfrac{-CH}{AH}.E'H+CH$

Remarque : on reconnaît ici l'équation de (AC) de la solution analytique.

D'autre part $\dfrac{EE'}{BE'}=\dfrac{FH}{BH}$ d'où $EE'=\dfrac{FH.BE'}{BH}=\dfrac{FH(BH+E'H)}{BH}=\dfrac{FH}{BH}.E'H+FH$

En identifiant ces deux expressions de EE', on obtient :

$\dfrac{-CH}{AH}.E'H+CH=\dfrac{FH}{BH}.E'H+FH$ d'où on tire $E'H\left(\dfrac{FH}{HB}+\dfrac{CH}{AH}\right)=CH-FH=FC$

E'H = $\dfrac{FC}{\dfrac{FH}{HB}+\dfrac{CH}{AH}}=\dfrac{FC}{\dfrac{FH.AH+CH.HB}{HB.AH}}$ Finalement $E'H=\dfrac{FC.HB.AH}{FH.AH+CH.HB}$

b) Calculons $\dfrac{EE'}{E'H}$, par exemple en utilisant la 2ème expression de EE' :

$$\frac{EE'}{E'H}=\frac{1}{E'H}\left(\frac{FH}{HB}E'H+FH\right)=\frac{FH}{HB}+\frac{FH}{E'H}=FH\left(\frac{1}{HB}+\frac{1}{E'H}\right)$$

$$\frac{EE'}{E'H}=FH\left(\frac{1}{HB}+\frac{1}{\dfrac{FH.HB.AH}{FH.AH+CH.HB}}\right)=FH\left(\frac{1}{HB}+\frac{FH.AH+CH.HB}{FC.HB.AH}\right)$$

$$\frac{EE'}{E'H}=FH.\frac{FC.AH+FH.AH+CH.HB}{FC.HB.AH}$$ Mais FC + FH = HC, et AH + HB = AC, d'où

finalement : $$\frac{EE'}{E'H}=FH.\frac{AH.HC+CH.HB}{FC.HB.AH}=FH\frac{HC(AH+HB)}{FC.HB.AH}=\frac{FH.HC.AB.}{FC.HB.AH}$$

c) Pour calculer $\frac{DD'}{D'H}$ il suffit de substituer, dans l'expression précédente, D à E, D' à E', A à B et B à A, ce qui donne :

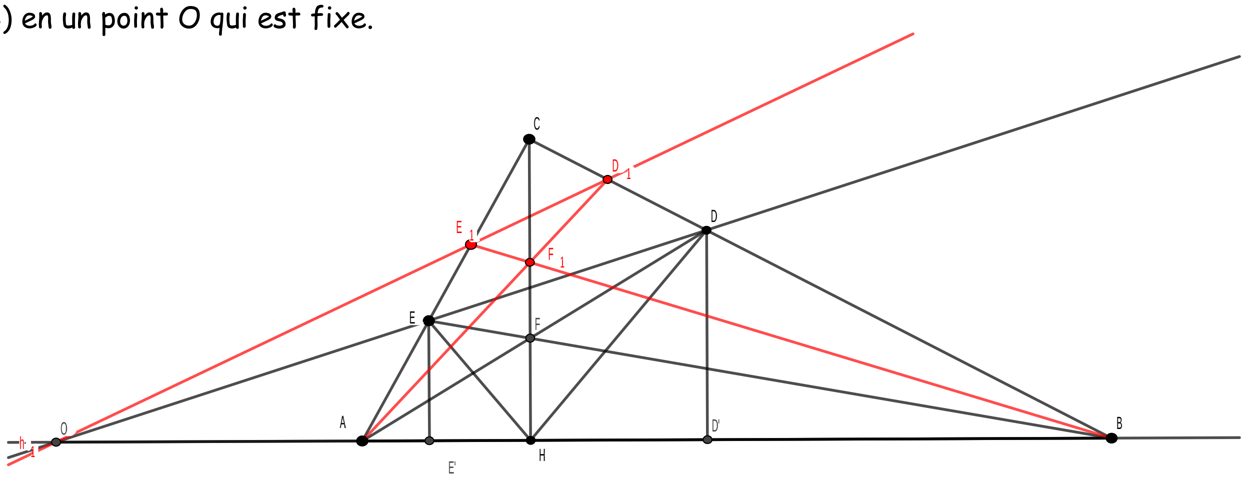
$$\frac{DD'}{D'H}=\frac{FH.HC.BA}{FC.HA.BH}\ .$$

d) On a donc bien $\frac{EE'}{E'H}=\frac{DD'}{D'H}$, ce qui prouve l'égalité des angles $\widehat{EHA}$ et $\widehat{DHB}$; (HC) est bissectrice intérieure de $\widehat{EHD}$

3. <u>Compléments et autres remarques</u>.

a) J'ai longtemps cherché une démonstration directe par évaluation de divers angles de la figure, qu'ils soient opposés par le sommet, alternes-internes, complémentaires, supplémentaires, etc, en rajoutant des points. Je n'y suis pas parvenu, mais je reste persuadé qu'une telle démonstration doit être possible.

b) Au cours de mes recherches, j'ai constaté sur une figure GeoGebra une autre propriété curieuse de la figure : A, B, C étant fixés, si je fais bouger E sur [AC], la droite (ED) coupe (AB) en un point O qui est fixe.



J'ai cherché une démonstration de cette propriété ; je me contenterai de donner une stratégie pour ce faire, les calculs étant nettement rebutants (un logiciel de calcul formel les mènerait à bien) :

(i) Méthode analytique : déterminer une équation de la droite (ED), puis l'abscisse de O, intersection de cette droite avec (AB) ; constater que seuls y apparaissent a, b, c, et non f : O est indépendant de la position de F.

(ii) Par les rapports de longueurs : appelons α l'angle $\widehat{AOE}$; on a

$\tan\alpha = \frac{EE'}{OE'} = \frac{EE'}{OH - E'H}$; et $\tan\alpha = \frac{DD' - EE'}{E'H + HD'}$ d'où on tire :

$OH = EE' . \frac{E'H + HD'}{DD' - EE'} + E'H$; en poursuivant ce calcul, et en utilisant les résultats de la partie 2., on doit trouver une expression de OH indépendante de E, E', D, D'.