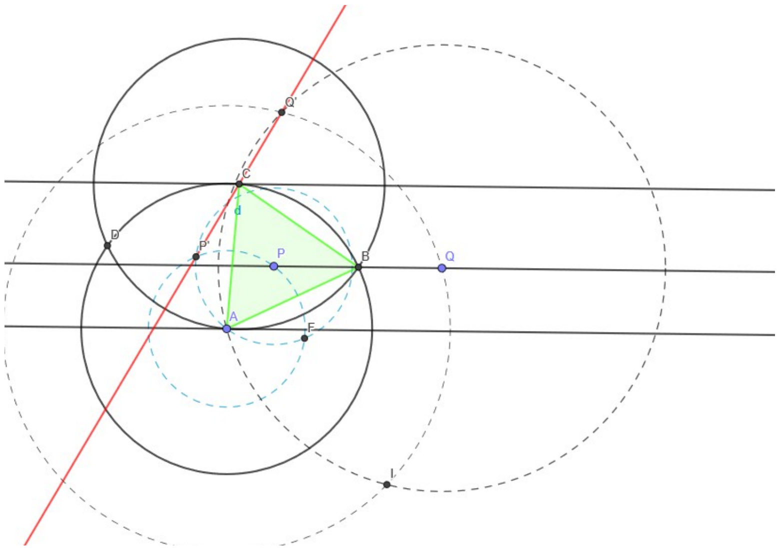
# Problème APMEP – Au Fil des Maths n° 537

Énoncé (en substance, de mémoire) : étant données 3 droites parallèles, construire un triangle équilatéral ayant un sommet sur chacune des 3 droites.

Solution : soient $d_1$, $d_2$, $d_3$ trois droites strictement parallèles, A un point fixe sur $d_1$, B un point mobile sur $d_2$, C le troisième sommet du triangle équilatéral direct ABC. C est l'image de B par la rotation de centre A, d'angle $\frac{\pi}{3}$ , notée R. Lorsque B parcourt $d_1$, C parcourt donc la droite Δ image de $d_2$ par R. La position de C qui répond à la question est l'intersection de Δ et $d_3$.

Pour construire Δ, on prend deux points P et Q quelconques sur $d_2$, P' = R(P) est celui des points d'intersection des cercles de centres A et P, de même rayon AP qui rend APP' direct ; l'image Q' de Q se construit de même. Alors le point C cherché est l'intersection de Δ et $d_3$. C étant placé, on construit de même B par intersection des cercle de centres A et C, de même rayon AC.

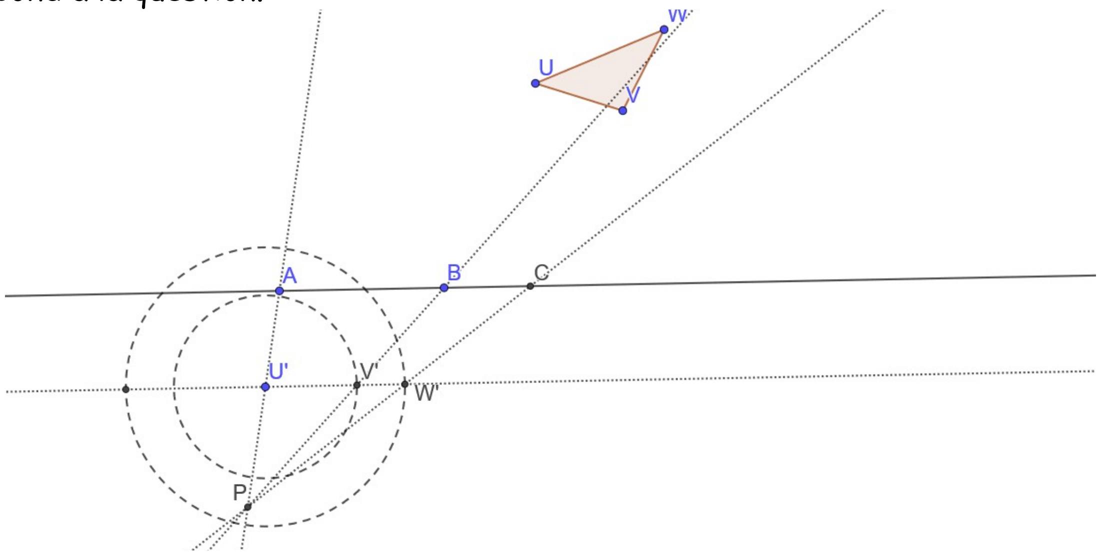


Une généralisation possible : il s'agit de remplacer la contrainte "triangle équilatéral" par "triangle ayant une forme imposée" :
étant données 3 droites parallèles $d_1$, $d_2$, $d_3$ et un triangle UVW, construire un triangle ABC semblable à UVW tel que $A \in d_1$, $B \in d_2$, $C \in d_3$.

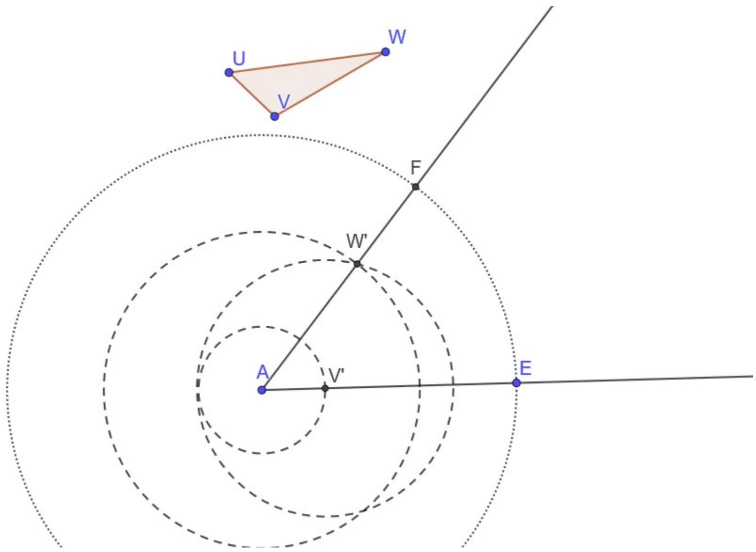
Solution : soit A un point fixe sur d1, B un point mobile sur $d_2$, C le troisième sommet du triangle ABC semblable à UVW. C est l'image de B par la similitude $\mathcal{S}$ d'angle $\alpha = (\overrightarrow{UV}, \overrightarrow{UW})$ et de rapport $k = \frac{UW}{UV}$ Il suffit donc de construire la droite Δ image de $d_2$ par $\mathcal{S}$. C sera l'intersection de Δ et $d_3$, et B sera l'image de C par la similitude $\mathcal{S}^{-1}$. Le problème est ainsi ramené à la construction de l'image d'un point par une similitude : on appliquera cette procédure à deux points de $d_2$ pour construire Δ, puis

(avec $\mathbb{S}^{-1}$) à C pour construire B.
Bien entendu, on utilisera la décomposition de la similitude en une rotation et une homothétie. Mais si l'on veut rester dans la cadre étroit de la construction à la règle et au compas, il faudra veiller à n'utiliser, même implicitement, ni la mesure de l'angle ni les mesures des côtés. Je propose de procéder comme suit :

a) Étant donnés le triangle UVW et deux points A et B (AB supposé différent de UV), pour construire C image de B par l'homothétie de centre A, de rapport $k=\frac{UW}{UV}$ , porter sur une parallèle à (AB) trois points U',V',W', dans cet ordre, tels que U'V'= UV et U'W'= UW. Les droites (AU') et (BV') se coupent en P ; (PW') coupe (AB) en C, qui répond à la question.




b) Étant donnés le triangle UVW et deux points A et E, pour construire F image de E par la rotation de centre A et d'angle $\alpha=(\overrightarrow{UV},\overrightarrow{UW})$ , placer sur la demi-droite [AE) un point V' tel que AV' = UV. Le cercle de centre A, de rayon UW et le cercle de centre V', de rayon VW se coupent en W' ; AV'W' est isométrique à UVW et on a donc $(\overrightarrow{AV'},\overrightarrow{AW'})=(\overrightarrow{UV},\overrightarrow{UW})$ . Le cercle de centre A, de rayon AE coupe [AW') en F qui répond à la question.



Commentaires : d'un point de vue pratique, la construction est fastidieuse, puisqu'elle suppose d'appliquer successivement les deux étapes précédentes, d'abord à deux points de $d_2$ pour construire $\Delta$, puis (avec $\mathbb{S}^{-1}$) à $C$ pour construire B. Au 21ème siècle, on utilisera évidemment une construction avec un logiciel comme Geogebra, plus rapide *et plus précise,* car le dessin manuel avec règle et compas n'est pas exempt d'approximations : la règle n'est jamais parfaitement droite, les traits ont une épaisseur, la pointe du compas n'est pas un vrai point... La construction règle/compas n'a pour moi qu'un intérêt historique et théorique : il s'agit en somme de se placer dans une géométrie où sont incluses les notions de longueur et d'angle, mais *pas leur mesure.* Le logiciel, lui, ramène tout au domaine numérique. Je ne sais pas comment sont programmées les commandes "homothétie" et "rotation" de Geogebra, mais il y a fort à parier qu'elles passent par les mesures de distances et d'angles. C'est néanmoins avec ces commandes que je construis la figure finale :