Une solution au problème 537-2

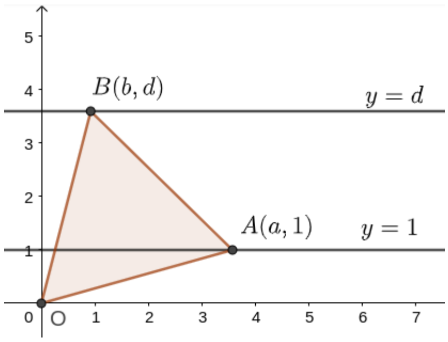
Pierre-Alain Sallard

October 20, 2020

Le problème étant invariant par rotation et homothétie, on munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ tel que :

1. la première droite soit l'axe des abscisses ;
2. la deuxième droite soit la droite d'équation $y = 1$.

La troisième droite du problème a alors une équation de la forme $y = d$, avec $d \in]1; +\infty[$.



Le problème étant invariant par translation, on fixe l'origine O du repère comme premier point du triangle. Il s'agit alors de déterminer les abscisses a et b des points $A(a, 1)$ et $B(b, d)$ tel que le triangle OAB soit équilatéral.
Là encore, par symétrie axiale, on se restreint au cas où $a > 0$.

On a les équivalences suivantes :

$$OAB \text{ est équilatéral} \iff \begin{cases} OA = OB \\ \left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) = \pm\frac{\pi}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} OA = OB \\ \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2} OA \times OB \end{cases} \iff \begin{cases} 1 + a^2 = b^2 + d^2 & (1) \\ ab + d = \frac{1}{2}(1 + a^2) & (2) \end{cases}$$

De (2), on tire que $b = \frac{1+a^2-2d}{2a}$ et en substituant dans (1), il vient que $1 + a^2 = \left(\frac{1+a^2-2d}{2a}\right)^2 + d^2$, ce qui se réécrit sous le forme de l'équation bicarrée (E) d'inconnue a

$$(E) : \quad 3a^4 + (2 - 4d(d-1))\,a^2 - 4d(d-1) - 1 = 0$$

Le polynôme $P(X) = 3X^2 + (2 - 4d(d-1))\,X - 4d(d-1) - 1$ admet -1 comme racine évidente et se factorise donc sous la forme

$$P(X) = (X+1)\big(3X - 4d(d-1) - 1\big)$$

On ne peut évidemment pas avoir $a^2 = -1$ donc on déduit de l'équation (E) que $a^2 = \frac{4d(d-1)+1}{3}$ puis que

$$a = \frac{\sqrt{4d(d-1)+1}}{\sqrt{3}}$$

car on a fixé $a > 0$.
De l'équation (1), on déduit que $b^2 = \frac{d(d-4)+4}{3}$. Or l'équation (2) assure que b est du même signe que $1 + a^2 - 2d = \frac{(d-2)(4d-2)}{3}$: puisque $d > 1$, $4d - 2$ est toujours positif donc b est du même signe de $d - 2$. Ainsi

$$b = \begin{cases} \frac{\sqrt{d(d-4)+4}}{\sqrt{3}} & \text{si } d \geqslant 2 \\ -\frac{\sqrt{d(d-4)+4}}{\sqrt{3}} & \text{si } 1 < d < 2 \end{cases}$$

En synthèse, on vérifie que les expressions ci-dessus de a et de b permettent de vérifier le système des deux équations (1) et (2), c'est-à-dire que OAB est bien un triangle équilatéral.