Problème 538_2. Sangaku hyperbolique.

Appelons C_1 le "petit" cercle et C_2 le grand. L'aire des deux disques est maximale quand celle du petit l'est. C'est alors le cercle osculateur à $y = \frac{1}{x}$ en $(1,1)$. On sait que son rayon est $R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$ en $x = 1$, ce qui donne $R = \sqrt{2}$ donc le centre F de C_1 est $(2,2)$.

Déterminons le centre $H(d, d)$ de C_2. C_2 a pour équation : $(x-d)^2+(y-d)^2 = (3-d)^2+(3-d)^2$ son intersection avec $y = \frac{1}{x}$ a 2 points, chacun étant double.

Donc $(x-d)^2 + \left(\frac{1}{x}-d\right)^2 = (3-d)^2 + (3-d)^2$ a deux solutions.

En posant $X = x + \frac{1}{x}$, cette équation s'écrit :

$X^2 - 2dX + (12d - 20) = 0$ qui ne doit donc avoir qu'une solution donc $\Delta = (-2d)^2 - 4(12d-20) = 0$ soit $d^2 - 12d + 20 = 0$ qui a 10 comme seule solution acceptable. Donc $H(10, 10)$.

Aire de $C_1 = 2\pi$ et Aire de $C_2 = 100\pi$.