Le 538.3. Somme de puissances.

0) Rappel : théorème de Fermat, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0[p]$ alors $n^{p-1} \equiv 1[p]$

Démonstration : Soit $n \neq 0[p]$ alors $\mathbb{Z}/p^* \longrightarrow \mathbb{Z}/p^*$, $x \longmapsto nx$ est bijective donc la liste $1, 2, \dots, (p-1)$ est la même à l'ordre près que la liste $n, 2n, \dots, (p-1)n$ et donc $\prod_{x=1}^{p-1} x = \prod_{x=1}^{p-1} (nx) = n^{p-1} \prod_{x=1}^{p-1} x \,[p]$ et donc $n^{p-1} \equiv 1\,[p]$.

1) On peut supposer $1 \leq k \leq p-2$.
En effet soit $k \in \mathbb{N}^*$, la division euclidienne de $k$ par $(p-1)$ donne $k = d(p-1) + k'$ avec $k' \neq 0$ sinon $(p-1)$ divise $k$ et donc $1 \leq k' \leq p-2$ puis $n^k = \left[n^{p-1}\right]^d \cdot n^{k'} = 1^d \cdot n^{k'}$ par Fermat et donc $n^{k'}$.

2) $1 \leq k \leq p-2$, $\exists\, y \in \mathbb{Z}/p^*$, $y^k \neq 1\,[p]$.
Sinon, $\forall y \in \mathbb{Z}/p^*$, $y^k = 1$. Le polynôme $Y^k - 1$ a $(p-1)$ zéros dans $\mathbb{Z}/p^*$ et son degré est supérieur ou égal à $(p-1)$ exclu car $k \leq p-2$.

3) Soit donc $y \in \mathbb{Z}/p^*$ tel que $y^k \neq 1[p]$, comme on l'a vu $\{1, 2, \dots, (p-1)\} = \{y, 2y, \dots, (p-1)y\}$ à l'ordre près alors $\sum_{x=1}^{p-1} x^k = \sum_{x=1}^{p-1} (xy)^k = y^k \sum_{x=1}^{p-1} x^k$ donc $(1 - y^k) \sum_{x=1}^{p-1} x^k = 0[p]$ et donc $\sum_{x=1}^{p-1} x^k = 0[p]$.

Remarque : si $(p-1) \mid k$ alors $k = d(p-1)$, $d \in \mathbb{N}$ et $n^k = \left[n^{(p-1)}\right]^d = 1^d = 1$ et donc $\sum_{n=1}^{p-1} n^k = \sum_{n=1}^{p-1} 1 = p-1 = -1[p]$