Exercice 538-4

On a le système

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=5 \\ x^3+y^3+z^3=4 \end{cases}$$

On va montrer que x, y et z ne peuvent pas être nul.
Supposons que $x=0$, on a alors

$$\begin{cases} y+z=1 \\ y^2+z^2=5 \\ y^3+z^3=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=1-z \\ (1-z)^2+z^2=5 \\ (1-z)^3+z^3=4 \end{cases}$$

donc $z^2-2z+1+z^2=2z^2-2z+1=5$ soit $z^2-z-2=0$ donc $z=2$ ou $z=-1$
Or $(1-2)^3+2^3=-1+8=7$ et $(1+1)^3+(-1)^3=8-1=7$
donc si x, y et z sont solutions du système aucun ne peut être nul et $A_0=x^0+y^0+z^0=1+1+1=3$

On va commencer avec n un entier positif
Soit x, y et z solution du système on a alors
$(x+y+z)\times(x+y+z)=1=x^2+y^2+z^2+xy+xz+yx+yz+zx+zy=5+xy+xz+yx+yz+zx+zy$
Donc $xy+xz+yx+yz+zx+zy=-4$

$(x+y+z)\times(x^2+y^2+z^2)=5=x^3+y^3+z^3+xy^2+xz^2+yx^2+yz^2+zx^2+zy^2$
Donc $xy^2+xz^2+yx^2+yz^2+zx^2+zy^2=1$
On note $B_2=xy^2+xz^2+yx^2+yz^2+zx^2+zy^2=1$

Soit $(x+y+z)\times(x^n+y^n+z^n)=x^n+y^n+z^n=x^{n+1}+y^{n+1}+z^{n+1}+xy^n+xz^n+yx^n+yz^n+zx^n+zy^n$
On note
$A_n=x^n+y^n+z^n$ et $B_n=xy^n+xz^n+yx^n+yz^n+zx^n+zy^n$
Donc $B_n=A_n-A_{n+1}$ ou $A_{n+1}=A_n-B_n$ (*)

Combien vaut xyz ?
$(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3(xy^2+xz^2+yx^2+yz^2+zx^2+zy^2)+6xyz$
Soit $1^3=1=4+3\times1+6xyz$ donc $xyz=-1$
Ce qui montre aussi que x, y et z ne peuvent pas être nuls.
Déterminons
$A_{-1}=A'_1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$
$(x+y+z)\times\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+1+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+1=3+\frac{x^2z+x^2y+y^2z+y^2x+yz^2+xz^2}{xyz}$
Soit $A'_1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3+\frac{b_2}{xyz}=3+\frac{1}{-1}=2$

Quelques calculs liminaires

$A_1\times A_1=1=(x+y+z)\times(x+y+z)=x^2+y^2+z^2+xy+xz+yx+yz+zx+zy=A_2+B_1$

Donc $B_1=A_2-A_1=5-1=4$. Ce qui n'est pas vraiment utile pour la suite.

$$A_2\times A'_1=10=\left(x^2+y^2+z^2\right)\times\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=x+y+z+\frac{x^2}{y}+\frac{x^2}{z}+\frac{y^2}{x}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}+\frac{z^2}{y}=A_1+\frac{B_3}{xyz}$$

donc $10=1+\dfrac{B_3}{-1}$ et $B_3=-9$

De (*) il vient $A_4=A_3-B_3=4+9=13$

$$A_3\times A'_1=8=\left(x^3+y^3+z^3\right)\times\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=x^2+y^2+z^2+\frac{x^3}{y}+\frac{x^3}{z}+\frac{y^3}{x}+\frac{y^3}{z}+\frac{z^3}{x}+\frac{z^3}{y}=A_2+\frac{B_4}{xyz}$$

Donc $8=5-B_4$ et $B_4=-3$

On est donc dans la situation suivante

n	A_n	B_n
1	1	4
2	5	1
3	4	-9
4	13	-3

On va montrer par récurrence qu'à partir du rang 3 , A_n est une suite d'entier naturel strictement croissante et que B_n est un entier strictement négatif.

On pose donc comme hypothèse de récurrence qu'à partir du rang 3 , A_n est une suite d'entier naturel positif strictement croissante et que B_n est un entier strictement négatif.

On a $A_{n+1}=A_n-B_n$ or A_n est un entier naturel positif et B_n est un entier strictement négatif donc A_{n+1} est un entier strictement positif et $A_{n+1}>A_n$.

De plus $A_n\times A'_1=\left(x^n+y^n+z^n\right)\times\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)=x^{n-1}+y^{n-1}+z^{n-1}+\dfrac{x^n}{y}+\dfrac{x^n}{z}+\dfrac{y^n}{x}+\dfrac{y^n}{z}+\dfrac{z^n}{x}+\dfrac{z^n}{y}=A_{n-1}+\dfrac{B_{n+1}}{xyz}$

Donc $A_n\times 2=A_{n-1}-B_{n+1}$ soit $B_{n+1}=A_{n-1}-A_n\times 2=A_{n-1}-A_n-A_n$

Par hypothèse de récurrence A_n et A_{n-1} sont des entiers strictement positifs, $A_{n-1}-A_n<0$ donc B_{n+1} est bien un entier strictement négatif.

On a bien montrer la proposition par récurrence.

On va voir ce qui se passe quand n est négatif, on pose

$A_{-n}=A'_n=\dfrac{1}{x^n}+\dfrac{1}{y^n}+\dfrac{1}{z^n}$ et $C_n=x^ny^{n-1}+x^nz^{n-1}+y^nx^{n-1}+y^nz^{n-1}+z^nx^{n-1}+z^ny^{n-1}$

On a $C_2=x^2y^1+x^2z^1+y^2x^1+y^2z^1+z^2x^1+z^2y^1=B_2=1$ et $C_1=x+x+y+y+z+z=B_1=2$

$$A'_n=A'_n\times A_1=\left(\frac{1}{x^n}+\frac{1}{y^n}+\frac{1}{z^n}\right)(x+y+z)=\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{1}{y^{n-1}}+\frac{1}{z^{n-1}}+\frac{y}{x^n}+\frac{z}{x^n}+\frac{x}{y^n}+\frac{z}{y^n}+\frac{x}{z^n}+\frac{z}{z^n}=A'_{n-1}+\frac{C_{n+1}}{(xyz)^n}$$

$$A'_n\times A'_1=\left(\frac{1}{x^n}+\frac{1}{y^n}+\frac{1}{z^n}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{x^{n+1}}+\frac{1}{y^{n+1}}+\frac{1}{z^{n+1}}+\frac{1}{x^ny}+\frac{1}{x^nz}+\frac{1}{y^nx}+\frac{1}{y^nz}+\frac{1}{z^nx}+\frac{1}{z^ny}=A'_{n+1}+\frac{C_n}{(xyz)^n}$$

Ainsi on a successivement

$A'_1\times A'_1=A'_2+\dfrac{C_1}{(xyz)^1}$ soit $4=A'_2+\dfrac{2}{-1}$ donc $A'_2=6$

$A'_2=A'_2\times A_1=A'_1+\dfrac{C_3}{(xyz)^2}$ soit $6=2+\dfrac{C_3}{1}$ donc $C_3=4$

$A'_2 \times A'_1 = A'_3 + \frac{C_2}{(xyz)^2}$ soit $6 \times 2 = A'_3 + \frac{1}{1}$ donc $A'_3 = 11$

$A'_3 = A'_3 \times A_1 = A'_2 + \frac{C_4}{(xyz)^3}$ soit $11 = 6 + \frac{C_4}{-1}$ donc $C_4 = -5$

$A'_3 \times A'_1 = A'_4 + \frac{C_3}{(xyz)^3}$ soit $11 \times 2 = A'_4 + \frac{4}{-1}$ donc $A'_4 = 26$

$A'_4 = A'_4 \times A_1 = A'_3 + \frac{C_5}{(xyz)^4}$ soit $26 = 11 + \frac{C_5}{1}$ donc $C_5 = 15$

$A'_4 \times A'_1 = A'_5 + \frac{C_4}{(xyz)^4}$ soit $26 \times 2 = A'_5 + \frac{-5}{1}$ donc $A'_5 = 57$

On est donc dans la situation suivante

n	A'_n	C_n
1	2	2
2	6	1
3	11	4
4	26	-5
5	57	15

On va montrer par récurrence qu'à partir du rang 4 , A'_n est une suite d'entier naturel strictement croissante avec $A'_n > 2 \times A'_{n-1}$ et que C_n est une suite alternée d'entier. Plus précisément $C_n > 0$ si n est impair et $C_n < 0$ si n est pair.

L'hypothèse est bien vérifiée au rang 4.
On suppose l'hypothèse vérifié jusqu'au rang n.
On a

$$A'_n \times A'_1 = A'_{n+1} + \frac{C_n}{(xyz)^n}$$

$$A'_{n+1} = A'_{n+} \times A_1 = A'_n + \frac{C_{n+2}}{(xyz)^{n+1}}$$

$$A'_{n+1} \times A'_1 = A'_{n+2} + \frac{C_{n+1}}{(xyz)^{n+1}}$$

donc si n est impair $C_n > 0$ et $\frac{C_n}{(xyz)^n} < 0$ et si n est pair $C_n < 0$ et $\frac{C_n}{(xyz)^n} < 0$.

Donc $A'_n \times 2 = A'_{n+1} + \frac{C_n}{(xyz)^n} < A'_{n+1}$ et a fortiori $A'_n < A'_{n+1}$

$A'_{n+1} = A'_{n+} \times A_1 = A'_n + \frac{C_{n+2}}{(xyz)^{n+1}}$ soit $A'_{n+1} - A'_n = \frac{C_{n+2}}{(xyz)^{n+1}}$

Si n est impair $C_n > 0$, n+1 est pair et $(xyz)^{n+1} = 1$ et $A'_{n+1} - A'_n = C_{n+2} > 0$

Si n est pair $C_n < 0$, n+1 est impair et $(xyz)^{n+1} = -1$ et $C_{n+2} = A'_n - A'_{n+1} < 0$

C_n est bien une suite alternée

On a bien vérifié l'hypothèse au rang n+1 et donc on a $A_n = x^n + y^n + z^n$ pour tout n entier.

Un petit programme Python pour trouver les valeurs de A_n

```
inv=[3,2,6,11]
c=[3,2,1,4]
```

```
for i in range(4,20):
    c.append((inv[i-1]-inv[i-2])*(-1)**(i-1))
    inv.append(inv[1]*inv[i-1]-c[i-1]*(-1)**(i-1))

print("A' : ",inv)
#print(c)

a=[3,1,5,4]
b=[3,4,1,-9]

for i in range(4,20):
    a.append(a[i-1]-b[i-1])
    b.append((a[i-1]*2-a[i-2])*(-1))

print("A : ",a)
#print(b)
```

Mais il convient de se poser la question : y a t'il des solutions au système ?

Je commence à faire un changement de repère orthonormé.

$$\begin{cases} x'=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y'=\frac{\sqrt{6}}{6}x-\frac{\sqrt{6}}{6}y+\frac{\sqrt{6}}{3}z \\ z'=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{3}y+\frac{\sqrt{3}}{3}z \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x=-\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{6}}{6}y'+\frac{\sqrt{3}}{3}z' \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{6}}{6}y'+\frac{\sqrt{3}}{3}z' \\ z=\frac{\sqrt{6}}{3}y'+\frac{\sqrt{3}}{3}z' \end{cases}$$

On a alors

$x+y+z=\sqrt{3}z'=1$ donc $z'=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $z'^2=\frac{1}{3}$,et $z'^3=\frac{\sqrt{3}}{9}$

$x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2=5$ et $x'^2+y'^2=5-\frac{1}{3}=\frac{14}{3}$

$x^3+y^3+z^3=\frac{\sqrt{6}}{6}y'^3-\frac{\sqrt{6}}{2}y'x'^2+\frac{43}{9}=4$

donc $\frac{\sqrt{6}}{6}y'^3-\frac{\sqrt{6}}{2}y'x'^2+\frac{7}{9}=0$ puis $y'^3-3y'\left(\frac{14}{3}-y'^2\right)+\frac{7\sqrt{6}}{9}=0$ et finalement $y'^3-\frac{7}{2}y'+\frac{7\sqrt{6}}{36}=0$

En utilisant les formules de Cardan avec k=0, 1 ou 2

$$y'=2\sqrt{\frac{6}{7}}cos\left(\frac{1}{3}arccos\left(-\frac{\sqrt{7}}{14}\right)+\frac{2k\pi}{3}\right)$$

$$x'=\pm\sqrt{\frac{14}{3}-\frac{14}{3}cos^2\left(\frac{1}{3}arccos\left(-\frac{\sqrt{7}}{14}\right)+\frac{2k\pi}{3}\right)}$$

$$z'=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = \mp\sqrt{\frac{7}{3}}\sqrt{1-cos^2\left(\frac{1}{3}arccos\left(-\frac{\sqrt{7}}{14}\right)+\frac{2k\pi}{3}\right)} - \frac{\sqrt{7}}{3}cos\left(\frac{1}{3}arccos\left(-\frac{\sqrt{7}}{14}\right)+\frac{2k\pi}{3}\right)+\frac{1}{3} \\ y = \pm\sqrt{\frac{7}{3}}\sqrt{1-cos^2\left(\frac{1}{3}arccos\left(-\frac{\sqrt{7}}{14}\right)+\frac{2k\pi}{3}\right)} - \frac{\sqrt{7}}{3}cos\left(\frac{1}{3}arccos\left(-\frac{\sqrt{7}}{14}\right)+\frac{2k\pi}{3}\right)+\frac{1}{3} \\ z = \frac{2\sqrt{7}}{3}cos\left(\frac{1}{3}arccos\left(-\frac{\sqrt{7}}{14}\right)+\frac{2k\pi}{3}\right)+\frac{1}{3} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = \mp\sqrt{\frac{7}{3}}\,sin\left(\frac{1}{3}arccos\left(-\frac{\sqrt{7}}{14}\right)+\frac{2k\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{7}}{3}cos\left(\frac{1}{3}arccos\left(-\frac{\sqrt{7}}{14}\right)+\frac{2k\pi}{3}\right)+\frac{1}{3} \\ y = \pm\sqrt{\frac{7}{3}}\,sin\left(\frac{1}{3}arccos\left(-\frac{\sqrt{7}}{14}\right)+\frac{2k\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{7}}{3}cos\left(\frac{1}{3}arccos\left(-\frac{\sqrt{7}}{14}\right)+\frac{2k\pi}{3}\right)+\frac{1}{3} \\ z = \frac{2\sqrt{7}}{3}cos\left(\frac{1}{3}arccos\left(-\frac{\sqrt{7}}{14}\right)+\frac{2k\pi}{3}\right)+\frac{1}{3} \end{array}\right.$$

Ce qui fait 6 solutions mais comme x, y et z jouent les mêmes rôles on peut faire des permutations circulaires mais en fait elles sont réalisées par les variations de k.

Géométriquement, dans le repère orthonormé (O,I, J, K) on a $G\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ le centre de gravité de IJK.

Dans le plan (IJK), les solutions sont sur le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{\frac{14}{3}}$ mais ce n'est pas un hexagone régulier.