538-1 Partage de pizzas

On utilise les coordonnées barycentriques dans le repère affine (A, B, C).

On choisit comme unité de longueur la longueur des côtés du triangle équilatéral.

Soient α, β, γ les aires des triangles BPC, CPA, APB. $\qquad \begin{cases} 2\alpha = PK \\ 2\beta = PG \\ 2\gamma = PH \end{cases}$

Alors le point P a pour coordonnées : $\qquad P \left| \begin{array}{l} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{array} \right. \qquad$ avec $\quad \alpha + \beta + \gamma = \text{aire}(ABC) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

Le point à l'infini Ω sur la droite (PK) est le même que celui de la médiatrice de [BC.].

Ses coordonnées sont : $\qquad \Omega \left| \begin{array}{l} -2 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right.$

La droite (PK) a pour équation : $\begin{vmatrix} x & \alpha & -2 \\ y & \beta & 1 \\ z & \gamma & 1 \end{vmatrix} = (\beta - \gamma) \cdot x - (\alpha + 2\gamma) \cdot y + (\alpha + 2\beta) \cdot z = 0$

On en déduit que le point K a pour coordonnées : $\quad K \left| \begin{array}{l} 0 \\ \alpha + 2\beta \\ \alpha + 2\gamma \end{array} \right. \quad$ ou encore $\quad K \left| \begin{array}{l} 0 \\ CK \\ BK \end{array} \right.$

Donc : $\qquad \dfrac{\alpha + 2\beta}{CK} = \dfrac{\alpha + 2\gamma}{BK} = 2 \cdot (\alpha + \beta + \gamma) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \qquad$ et $\qquad \begin{cases} BK = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot (\alpha + 2\gamma) \\ CK = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot (\alpha + 2\beta) \end{cases}$

$$\begin{cases} \text{aire}(BPK) = \dfrac{1}{2} \cdot PK \cdot BK = \dfrac{2\alpha}{\sqrt{3}} \cdot (\alpha + 2\gamma) \\ \text{aire}(CPK) = \dfrac{1}{2} \cdot PK \cdot CK = \dfrac{2\alpha}{\sqrt{3}} \cdot (\alpha + 2\beta) \end{cases}$$

Par permutation circulaire sur A, B, C, on obtient : $\begin{cases} \text{aire(BPK)} = \dfrac{2\alpha}{\sqrt{3}} \cdot (\alpha + 2\gamma) \\ \text{aire(CPG)} = \dfrac{2\beta}{\sqrt{3}} \cdot (\beta + 2\alpha) \\ \text{aire(APH)} = \dfrac{2\gamma}{\sqrt{3}} \cdot (\gamma + 2\beta) \end{cases}$

L'aire A de la partie orange est la somme des aires de ces trois triangles :

$$A = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \big(\alpha \cdot (\alpha + 2\gamma) + \beta \cdot (\beta + 2\alpha) + \gamma \cdot (\gamma + 2\beta)\big) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot (\alpha + \beta + \gamma)^2 = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

L'aire A est donc la moitié de l'aire du triangle ABC.