Numéro 539-4.

Question 1

Soit A et B deux points de la parabole avec $x_A+x_B \neq 0$. On cherche une équation de la droite (AB).
On a $y_B - y_A = (x_B - x_A)(x_B + x_A)$ donc le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire au vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $(1\ ;\ x_B + x_A)$.
En utilisant ce vecteur $\vec{v}$ et le fait que $y_A = x_A^2 - \sqrt{2}$ on obtient qu'une équation de la droite (AB) est :

$(x_B + x_A)x - y - \sqrt{2} - x_B x_A = 0$. On observe que cette équation convient aussi lorsque $x_A + x_B = 0$.
Pour que cette droite (AB) soit tangente au cercle unité, il faut et il suffit que sa distance au point O soit égale à 1. Ceci se traduit par l'égalité $| -\sqrt{2} - x_B x_A | = \sqrt{(x_B + x_A)^2 + 1}$ et finalement, en élevant au carré et en

réduisant, par l'égalité $(x_A^2 - 1)x_B^2 + (2\sqrt{2}x_A - 2x_A)x_B + 1 - x_A^2 = 0$

Remarque : Lorsque $x_A = 1$ ou $x_A = -1$, on a comme possibilité $x_B = 0$ mais la deuxième tangente issue de A au cercle unité est verticale. Dans cette configuration il n'est pas possible selon moi d'obtenir les quatre points A, B, B_1 et C cités dans l'énoncé. Le quatrième est à l'infini.

Je me place donc dans le cas où $x_A^2 \neq 1$. Dans ce cas l'égalité qui précède montre que les abscisses des deux points d'intersection B et B_1 entre la parabole et les tangentes issues de A sont les deux solutions de l'équation du second degré $(x_A^2 - 1)x^2 + (2\sqrt{2}x_A - 2x_A)x + 1 - x_A^2 = 0$. Les valeurs des coefficients a et c de

cette équation et le résultat classique sur le produit des racines nous donnent la propriété $x_B x_{B_1} = -1$
Ce résultat est général quelle que soit la position initiale de A dès lors que $x_A^2 \neq 1$.

Si on l'applique en remplaçant A par B puis par B_1 on trouve que :
→ les deux tangentes au cercle issues de B coupent la parabole en A et un point C tel que $x_A x_C = -1$;
→ les deux tangentes au cercle issues de B_1 coupent la parabole en A et un point C' tel que $x_A x_{C'} = -1$;

Donc les points C et C' ont la même abscisse et donc $C = C'$. CQFD

Question 2.

Lorsqu'on reprend l'équation de la droite passant par deux points de la parabole obtenue au début de la question 1 en prenant comme points A et C, on obtient, compte tenu du fait que $x_A x_C = -1$, l'équation $(x_B + x_A)x - y - \sqrt{2} + 1 = 0$. Cette droite coupe l'axe vertical, qui est l'axe de la parabole, au point K de coordonnées $(0\ ;\ 1 - \sqrt{2})$.
Le même raisonnement montre que la droite (BB_1) coupe elle aussi l'axe de la parabole en ce point.

Question 3.

Je n'ai pas trouvé de solution simple car je ne parviens pas à prouver de manière simple que les quadrilatères $ABCB_1$ et MNPQ ont leurs diagonales toutes sécantes en K.
Alors voilà une méthode compliquée dont je pense qu'elle fonctionne mais qu'elle pourrait être bien simplifiée si j'avais des connaissances en polaires, faisceaux de droites et géométrie projective ;
J'étudie d'abord de manière analytique l'intersection de (AB) et (CB_1).
On a une équation de (AB) dans la question 1. Par analogie on en déduit une de (CB_1). Et on trouve que l'abscisse x de leur point d'intersection vérifie, compte tenu aussi du fait que $x_{B_1} = \frac{-1}{x_B}$ et $x_C = \frac{-1}{x_A}$ et après

quelques calculs et simplifications, $x = \frac{x_A x_B - 1}{x_A + x_B}$. En remplaçant dans l'équation de la droite (AB) on trouve que l'ordonnée y de ce point est égale à $-1 - \sqrt{2}$.
La même méthode donne le même résultat pour l'ordonnée du point d'intersection des deux droites (BC) et (AB_1). Les points d'intersection des côtés opposés de $ABCB_1$ sont donc sur la droite Δ d'équation
$y = -1 - \sqrt{2}$.
C'est maintenant que vient la partie trop tordue de mon raisonnement. Il se trouve que cette équation est celle de la polaire du point K (de la question 2) par rapport au cercle unité. Il se trouve également que les droites formant les côtés de $ABCB_1$ les tangentes à ce cercle en M, N, P, et Q, leurs points d'intersection sont sur la polaire du point d'intersection K' des diagonales de MNPQ par rapport à ce même cercle. Donc K=K' (unicité

du pôle pour une droite donnée). Maintenant si j'appelle G et H les points d'intersection des côtés opposés deMNPQ, les six points M, N, P, Q, G et H donne une configuration de quadrilatère complet ce qui entraîne que G et H sont eux aussi sur la polaire du point d'intersection K'(=K) de (MP) et (QN). D'où la conclusion.