APMEP 539-4 Un Duo de Coniques MB

(U) : $x^2+y^2=1$ (P) : $y = x^2 - \sqrt{2}$ Quadrilatère circonscrit à (U) et inscrit dans (P).

Q1) Soient deux points S et T de (P) d'abscisses s et t. La droite qui les joint a pour équation :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ s & t & 1 \\ s^2-\sqrt{2} & t^2-\sqrt{2} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

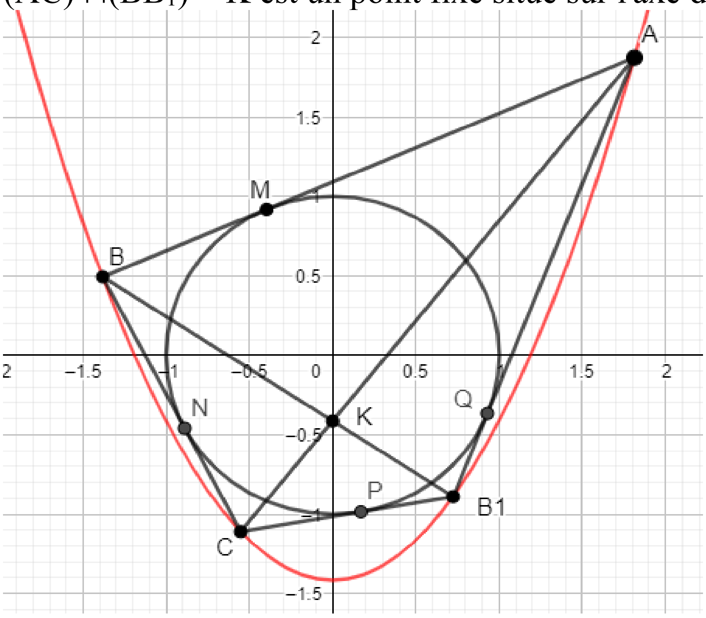
avec $s \neq t$, d'où $\underline{x(s+t) - y - (st + \sqrt{2}) = 0}$

La distance de l'origine à une droite d'équation $ax + bt + c = 0$ est : $|c|/\sqrt{(a^2+b^2)}$

La droite ST est tangente à (U) ssi $(st + \sqrt{2})^2 = (s+t)^2 + 1$ ou $s^2(1 - t^2) + 2st(\sqrt{2} - 1) + (t^2 - 1) = 0$
Pourvu que ni t, ni $t^2 - 1$ ne soient nuls, cette équation où t est le paramètre et s l'inconnue admet toujours deux solutions réelles de produit -1.
Si la tangente à (U) issue de B et autre que (BA) recoupe (P) en C, et si la tangente issue de B_1 autre que (B_1A) recoupe (P) en C_1, les abscisses de C et C_1 sont égales car elles valent $-1/x_A$.
Les points C et C_1 sont donc confondus.

Q2) La droite qui joint deux points de (P) d'abscisses s et -1/s a pour équation :
$x(s - 1/s) - y - (-1+ \sqrt{2}) = 0$ Elle coupe l'axe Oy au point K $(0, \sqrt{2} - 1)$

Les abscisses de A et C ont pour produit -1, celles de B et B_1 ont pour produit -1, donc $(AC) \cap (BB_1) = K$ est un point fixe situé sur l'axe de (P).

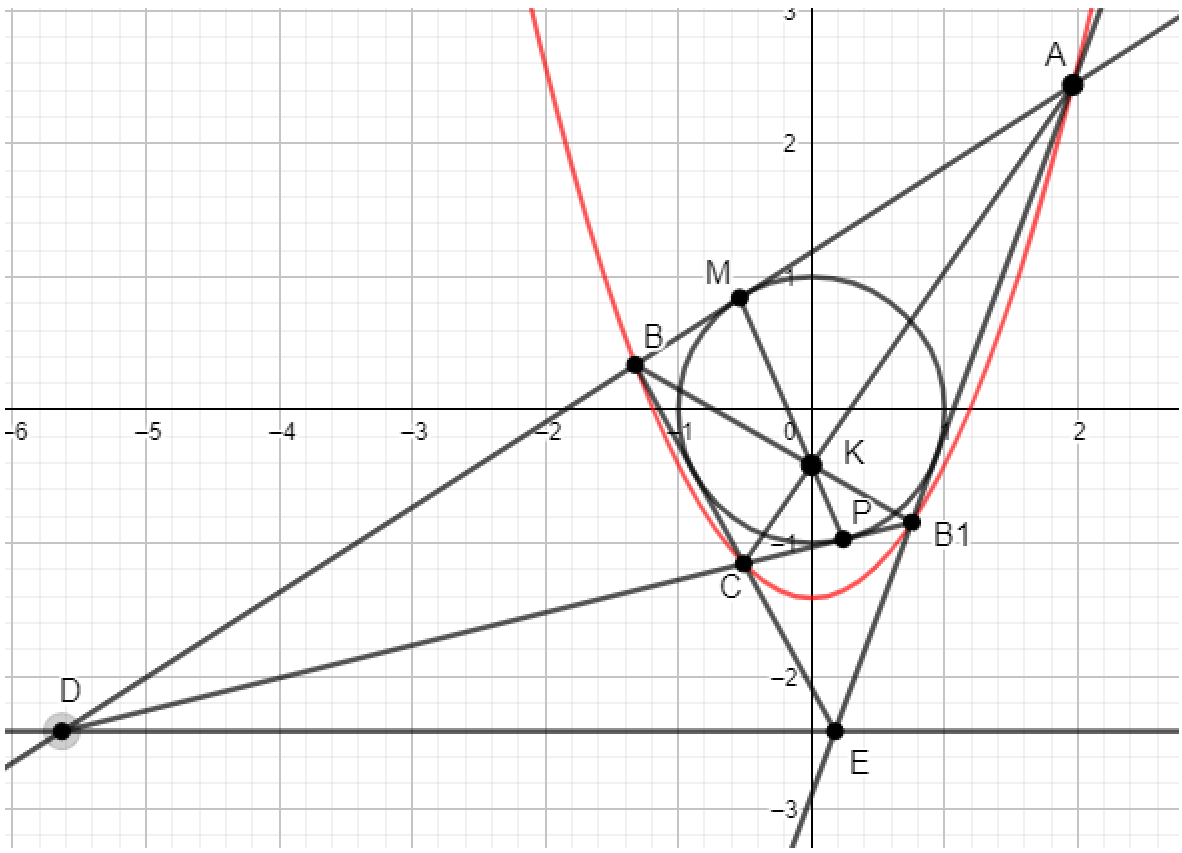


Q3) (AB), (BC), (CB_1), (AB_1) forment un quadrilatère complet. Les côtés opposés se coupent sur la polaire (Δ) du point K par rapport à la parabole (P) : sur la droite d'équation $y = -(1+\sqrt{2})$.

Soient les points H = pied de cette polaire (Δ), $D = (AB)\cap(CB_1)$, $E = (CB)\cap(AB_1)$.
$OK*OH = (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = 1$ donc la droite (Δ) est aussi polaire de K par rapport à (U).
Comme D est sur la polaire de K, K est sur la polaire de D par rapport à (U) : K est sur (MP).
De même K est sur (QN).

$(MP)\cap(QN) = K$, donc $(MN)\cap(PQ)$ et $(PN)\cap(QP)$ sont sur la droite (Δ).

Les intersections des paires de côtés opposés de chacun des quadrilatères $ABCB_1$ et MNPQ sont toutes les quatre alignées sur la même droite (Δ).



A
M
B
K
P
B1
C
D
E
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
2
1
-1
-2
-3