539.4. Un duo de coniques

1°) a) Soit $x = t$ et $y = t^2 - \sqrt{2}$ une représentation paramétrique de P. $M(t)$ et $M'(t')$ sur P, cherchons la relation qui lie t et t' pour que (MM') soit tangente à $\mathcal{C}_0$, $t \neq t'$. (MM') a pour équation $\begin{vmatrix} x & t & t' \\ y & t^2-\sqrt{2} & t'^2-\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, développons et simplifions par $(t-t')$, il vient

$x(t+t') - y - tt' - \sqrt{2} = 0$ écrivons que sa distance à O vaut 1 : $1 = \dfrac{(tt'+\sqrt{2})^2}{1+(t+t')^2}$ soit $t'^2(t^2-1) + 2tt'(\sqrt{2}-1) + 1 - t^2 = 0$

Donc pour un point $M(t)$ sur P les deux segments tangents (MM') et $(M'M'')$ où M' et M'' sur P alors les paramètres t' et t'' de M' et M'' sont les solutions de $X^2(t^2-1) + 2tX(\sqrt{2}-1) + 1 - t^2 = 0$ on a $t't'' = -1$.

b) Soit donc (B_1C_1) et (B_1A) les segments issus de B_1, (BA) et (BC_2) issus de B. $A(t)$, $B_1(t')$, $B(t'')$, $C_1(t_1)$, $C_2(t_2)$ sur P alors $t t_1 = -1$ et $t t_2 = -1$ soit $t_1 = t_2$ et $C_1 = C_2$. On a donc bien une chaîne fermée de quatre segments $ABCB_1$ inscrit dans P et circonscrit à $\mathcal{C}_0$.

c) Autre façon : On peut se dispenser de tout calcul en utilisant le <u>grand théorème de Poncelet</u> qui dit ici que en partant de <u>tout</u> point A, on a un quadrilatère inscrit dès que cela est vrai pour <u>un</u> point A de P. Si A est en S le sommet de la parabole alors $B(-1)$ et $B_1(1)$ de sorte que les tangentes issues de B et B_1 sont parallèles à (Oy) et $C = y_\infty$ le point à l'infini dans la direction (Oy) et $y_\infty \in P$