Proposition de problème

Relativement à un repère orthonormé (O, I, J), soit$(\boldsymbol{U})$ le cercle unité d'équation $x^2 + y^2 = 1$ et $(\boldsymbol{P})$ la parabole d'équation $y = x^2 - \sqrt{2}$; A est un point quelconque de $(\boldsymbol{P})$. On construit les tangentes (AB) et (AB_1)au cercle $(\boldsymbol{U})$ issues de A qui recoupent la parabole $(\boldsymbol{P})$ en B et B_1.

1. Démontrer que les tangentes au cercle $(\boldsymbol{U})$ issues de B et B_1 autres que (BA) et (B_1A) se coupent en un point C appartenant à la parabole $(\boldsymbol{P})$.

2. Démontrer que lorsque A varie sur $(\boldsymbol{P})$ les diagonales (AC) et (BB_1) du quadrilatère variable $ABCB_1$ inscrit dans $(\boldsymbol{P})$ et circonscrit à $(\boldsymbol{U})$ se coupent en un point fixe K situé sur l'axe de la parabole.

3. Soient M, N, P, Q les points de tangence. Démontrer que les intersections des paires de droites opposées des quadrilatères $ABCB_1$ et $MNPQ$ sont toutes les quatre alignées sur une même droite (Δ).

Éléments de solution

1. Soient $a, b, c, b1$ les abscisses des points A, B, C, B_1.

La droite (AB) pour A et B appartenant à $(\boldsymbol{P})$ est tangente à $(\boldsymbol{U})$ si et seulement si la distance du centre O du cercle $(\boldsymbol{U})$ à la droite (AB) est égale à 1, ce qui se traduit par l'équation :

$$(ab + \sqrt{2})^2 = (a + b)^2 + 1$$

laquelle, développée et réarrangée, s'écrit

$$\frac{b^2 - 1}{b} = \frac{a}{a^2 - 1}(2 - 2\sqrt{2})$$

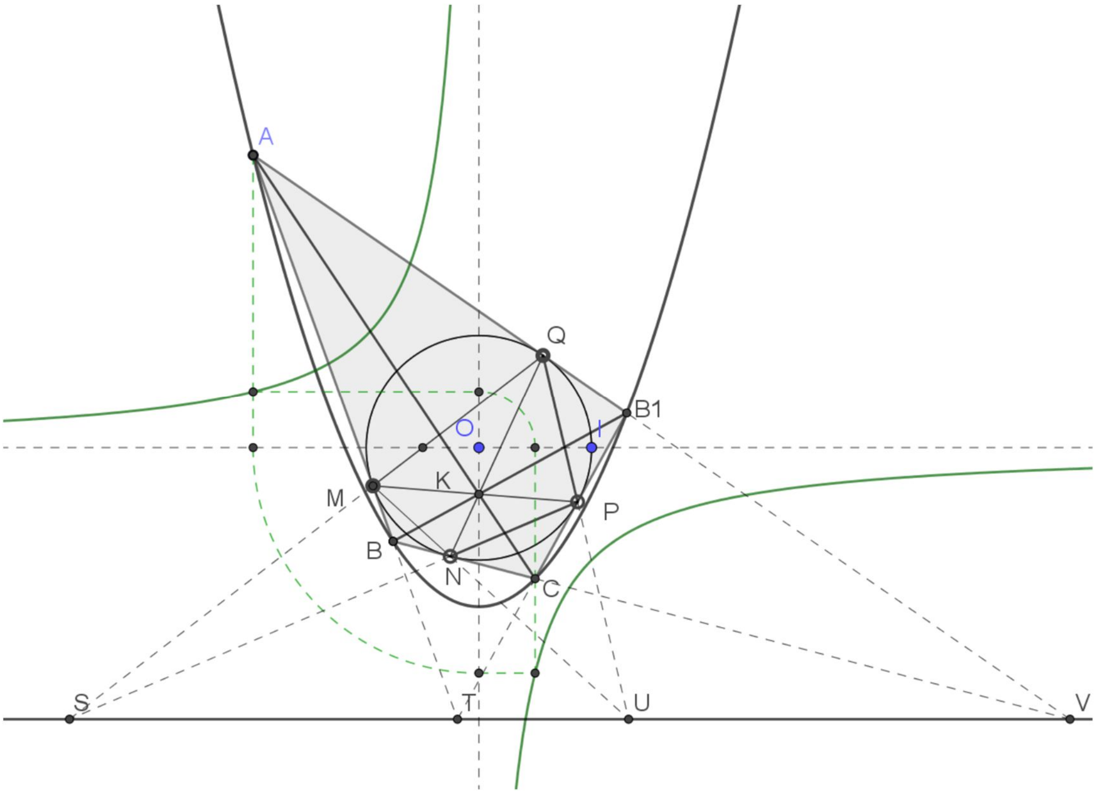
Mais on a aussi

$$\frac{c^2 - 1}{c} = \frac{b}{b^2 - 1}\left(2 - 2\sqrt{2}\right) = \frac{a^2 - 1}{a}$$

Donc $(c - a)(ac + 1) = 0$ ou $c = -\frac{1}{a}$

De même si c_1 est l'abscisse du point d'intersection de la tangente issue de B_1avec la parabole, on trouve de même $c_1 = -\frac{1}{a}$ donc $c = c_1$.

2. et 3. Sont affaire de calcul. Le point K a pour coordonnées (0, $1 - \sqrt{2}$) ; la droite (Δ) a pour équation : $y = -(1 + \sqrt{2}\ )$. En fait, (Δ) est la polaire de K.



Signalons que l'ensemble des propriétés énoncées et démontrées ci-dessus valent pour toute parabole d'équation $y = \frac{1}{sin\theta}(x^2 cos\theta - 1)\ \theta \in \left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$, résultat trouvé en cherchant des paraboles ayant un polygone de Poncelet inscrit, et circonscrit au cercle unité.

Jean-Pierre Friedelmeyer
Osenbach
jpfriede@free.fr