539-2 Une variante de l'équation de Markov

On rappelle que l'équation de Markov est la suivante : $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$; elle admet des solutions qui sont disposées dans un arbre binaire et x, y, z sont permutables.

On considère l'équation

$$a^2 + 2b^2 + 3c^2 = 6abc, \tag{1}$$

et on cherche des solutions avec $a, b, c \in \mathbb{N}$. Il y a la solution $a = b = c = 0$; sinon, a, b et c sont tous différents de zéro. Les entiers a, b, c ne sont pas permutables.

On remarque que l'équation (1) admet au moins une solution : $a = b = c = 1$. On considère une solution (a, b, c) et on cherche s'il existe des solutions de l'une des 3 formes suivantes :

(i) (x, b, c) ; on a alors

$$\begin{cases} a^2 + 2b^2 + 3c^2 &= 6abc \\ x^2 + 2b^2 + 3c^2 &= 6xbc \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 + 2b^2 + 3c^2 &= 6abc \\ x^2 - a^2 &= 6bc(x - a). \end{cases}$$

On obtient donc la solution $x = 6bc - a$.

(ii) (a, y, c) ; on a alors

$$\begin{cases} a^2 + 2b^2 + 3c^2 &= 6abc \\ a^2 + 2y^2 + 3c^2 &= 6ayc \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 + 2b^2 + 3c^2 &= 6abc \\ y^2 - b^2 &= 3ac(y - b). \end{cases}$$

On obtient donc la solution $y = 3ac - b$.

(iii) (a, b, z) ; on a alors

$$\begin{cases} a^2 + 2b^2 + 3c^2 &= 6abc \\ a^2 + 2b^2 + 3z^2 &= 6abz \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 + 2b^2 + 3c^2 &= 6abc \\ z^2 - c^2 &= 2ab(z - c). \end{cases}$$

On obtient donc la solution $z = 2ab - c$.

On applique ce procédé pour trouver des solutions à partir d'une solution connue. On remarque que dans chaque cas, cette méthode peut donner des solutions déjà trouvées ; en particulier, si on la répète avec la solution obtenue, on retrouve la solution (a, b, c).

On part de la solution $(1, 1, 1)$, et on cherche d'abord la première solution de la forme

- $(x, 1, 1)$ et on obtient $(5, 1, 1)$,
- $(1, y, 1)$ et on obtient $(1, 2, 1)$,
- $(1, 1, z)$ et on retrouve $(1, 1, 1)$,

et on continue avec les nouvelles solutions obtenues.

Pour obtenir une liste de solutions, on les classe selon les valeurs de a ou b ou c. Les résultats ont étés obtenus avec PARI gp.

Voici dabord la liste des a (resp. b, c) pour lesquels (1) admet une solution (a, b', c') avec a (resp. b, c) fixé :

$$a \in \{1, 5, 11, 35, 49, 79, \ldots\}$$
$$b \in \{1, 2, 7, 14, 26, 31, 97, \ldots\}$$
$$c \in \{1, 3, 9, 11, 41, 43, 89, \ldots\}\cdot$$

Voici, pour terminer, des listes de solutions obtenues lorsque : $a = 1$ ou 5, $1 \leq b', c' \leq 10000$, $b = 1$ ou 2, $1 \leq a', c' \leq 10000$ et $c = 1$ ou 3, $1 \leq a', b' \leq 10000$.

$a=1$	$a=5$	$b=1$	$b=2$	$c=1$	$c=3$
$(1,1,1)$	$(5,1,1)$	$(1,1,1)$	$(1,2,1)$	$(1,1,1)$	$(1,2,3)$
$(1,2,1)$	$(5,1,9)$	$(5,1,1)$	$(1,2,3)$	$(1,2,1)$	$(1,7,3)$
$(1,2,3)$	$(5,134,9)$	$(5,1,9)$	$(35,2,3)$	$(11,2,1)$	$(125,7,3)$
$(1,7,3)$	$(5,134,1331)$	$(49,1,9)$	$(35,2,137)$	$(11,31,1)$	$(125,1118,3)$
$(1,7,11)$		$(49,1,89)$	$(1609,2,137)$	$(175,31,1)$	
$(1,26,11)$	$(5,1,1)$	$(485,1,89)$	$(1609,2,6299)$	$(175,494,1)$	$(1,2,3)$
$(1,26,41)$	$(5,14,1)$	$(485,1,881)$		$(2789,494,1)$	$(35,2,3)$
$(1,97,41)$	$(5,14,139)$	$(4801,1,881)$	$(1,2,1)$	$(2789,7873,1)$	$(35,313,3)$
$(1,97,153)$	$(5,2071,139)$	$(4801,1,8721)$	$(11,2,1)$		$(5599,313,3)$
$(1,362,153)$			$(11,2,43)$	$(1,1,1)$	
$(1,362,571)$			$(505,2,43)$	$(5,1,1)$	
$(1,1351,571)$			$(505,2,1977)$	$(5,14,1)$	
$(1,1351,2131)$				$(79,14,1)$	
$(1,5042,2131)$				$(79,223,1)$	
$(1,5042,7953)$				$(1259,223,1)$	
				$(1259,3554,1)$	

On remarque que le départ $(1,1,1)$ pour $(1,b',c')$ et $(a',1,c')$ ne donne q'une famille, ce qui est normal, puisque la solution $(1,1,z)$ n'est possible que pour $z = 1$.

Marie-Nicole Gras