539-3 Rester toujours positif

On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels définie par

$$a_0 = 1, \quad a_1 = x, \quad a_2 = y \ \text{ et } \ a_{n+3} = a_n - a_{n+1}. \tag{1}$$

On cherche s'il existe une suite géométrique, $a_n = qx^n, q, x \neq 0$, solution de (1) ; on remplace et on obtient

$$qx^{n+3} = qx^n - qx^{n+1} \iff x^3 + x - 1 = 0.$$

On considère le polynôme $P = x^3 + x - 1$; son discriminant est $\Delta = \dfrac{4+27}{27} = \dfrac{31}{27}$; on a $\Delta > 0$, et donc P admet une seule racine réelle

$$u = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{31}{27}} + \frac{1}{2}} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{31}{27}} - \frac{1}{2}} \approx 0.68232780.$$

Puisque $a_0 = 1 = u^0$, on a $q = 1$; on choisit $x = u$ et $y = u^2$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = x^n$ vérifie (1). Comme $u^n > 0$, si $x = u$ et $y = u^2$, tous les termes de la suite (a_n) sont strictement positifs.

Marie-Nicole Gras