Exercice 539 -1 Ludovic Jany

Une démonstration analytique

On se place dans un repère orthonormé tel que $A(0;0)$, $B(60;0)$, $C(60;c)$ et $E(-30;30\sqrt{3})$.

On note F l'intersection de (DE) et (AB).

Le triangle AEF est rectangle en E et l'angle en A vaut $\frac{\pi}{3}$ et l'angle en F $\frac{\pi}{6}$

L'équation de(ED) est donc $y = tan\frac{\pi}{6}(x+30)+30\sqrt{3}$ soit $y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+30)+30\sqrt{3}$ et finalement

$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+40\sqrt{3}$

On note G l'intersection de (DC) et (AB).

Le triangle BCG est rectangle en B.

Les triangles ABC et AED sont semblables donc le triangle ADC est isocèle en A.

En notant $\alpha = B\hat{A}C = E\hat{A}D$ il vient $A\hat{C}B=\frac{\pi}{2}-\alpha$, $D\hat{A}C=\frac{2\pi}{3}-2\alpha$, $D\hat{C}A=\frac{\pi}{6}+\alpha$, $B\hat{C}G=\frac{\pi}{3}$ et

$B\hat{G}C=\frac{\pi}{6}$

L'équation de(CD) est donc $y=-tan\frac{\pi}{3}(x-60)+c$ soit $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+20\sqrt{3}+c$

D étant l'intersection de (ED) et (CD), on a $\frac{\sqrt{3}}{3}x+40\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+20\sqrt{3}+c$

donc $\frac{2\sqrt{3}}{3}x=-20\sqrt{3}+c$ et $x=-30+c\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(-30+c\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+40\sqrt{3}=-10\sqrt{3}+\frac{c}{2}+40\sqrt{3}=\frac{c}{2}+30\sqrt{3}$$

Donc $D\left(-30+c\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{c}{2}+30\sqrt{3}\right)$ et $\overrightarrow{DC}\left(90-c\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{c}{2}-30\sqrt{3}\right)$

$$DC^2=\left(90-c\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}-30\sqrt{3}\right)^2=8100-90c\sqrt{3}+\frac{3}{4}c^2+\frac{1}{4}c^2-30c\sqrt{3}+2700=c^2-120c\sqrt{3}+10800$$

On va donc résoudre l'équation $c^2-120c\sqrt{3}+10800=3600$ ou plutôt $c^2-120c\sqrt{3}+7200=0$

$\Delta=14400\times 3-4\times 7200=43200-28800=14400=120^2$

Donc $c=\frac{120\sqrt{3}-120}{2}=60(\sqrt{3}-1)$

$C(60;60(\sqrt{3}-1))$ et $D\left(60\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right);60\left(\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)\right)$

Dans le triangle AEF rectangle en E, on a $sin\frac{\pi}{6}=\frac{EA}{FA}=\frac{60}{AF}=\frac{1}{2}$ donc AF=120 et $F(-120;0)$

Dans le triangle BCG rectangle en B, on a $tan\frac{\pi}{6}=\frac{BC}{BG}=\frac{60(\sqrt{3}-1)}{BC}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ donc

$BG=60\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)=180-60\sqrt{3}$ et $G(240-60\sqrt{3};0)$

Pour le calcul de l'aire on va utiliser

$2\times Aire(ABCDE)=2\times Aire(FDG)-2\times Aire(FEA)-2\times Aire(BCG)$

soit $2\times Aire(ABCDE)=(360-60\sqrt{3})\times 60\left(\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)-120\times 30\sqrt{3}A-(180-60\sqrt{3})\times 60(\sqrt{3}-1)$

et $2\times Aire(ABCDE)=3600(6-\sqrt{3})\times\left(\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)-3600\sqrt{3}-3600(3-\sqrt{3})\times(\sqrt{3}-1)$

$$2\times Aire(ABCDE)=3600\left(6\sqrt{3}-3-3+\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}-3\sqrt{3}+3+3-\sqrt{3}\right)=3600\times\frac{3\sqrt{3}}{2}=5400\sqrt{3}$$

Donc $Aire(ABCDE)=2700\sqrt{3}$