Exercice 539 -3 avec unicité Ludovic Jany

Soit $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = x \\ a_2 = y \\ a_{n+3} = a_n - a_{n+1} \end{cases}$

On va montrer qu'il existe un couple x et y rendant la suite géométrique avec une raison comprise entre 0 et 1 ce qui fera que tous les termes de la suite seront strictement positifs.
On suppose $a_n = q^n$ pour entier n ,
$a_{n+3} = a_n - a_{n+1}$ donc $q^{n+3} = q^n - q^{n+1}$ soit $q^3 = 1 - q$ donc q est une solution de l'équation $x^3 + x - 1 = 0$
On est sous la forme $x^3 + px + q = 0$ peut donc utiliser les formules de Cardan avec $p = 1$ et $q = -1$
$\Delta = -(4p^2 + 27q^2) = -(4 + 27) = -31 < 0$

Il n'y a donc qu'une racine réelle $q = \sqrt[3]{\dfrac{1+\sqrt{\dfrac{31}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\dfrac{1-\sqrt{\dfrac{31}{27}}}{2}}$

$q \approx 0{,}68$ donc $0 < q < 1$.

$q^3 + q - 1 = 0$ donc $q^3 = 1 - q$ et $q^2 = \dfrac{1-q}{q} = \dfrac{1 - \sqrt[3]{\dfrac{1+\sqrt{\dfrac{31}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\dfrac{1-\sqrt{\dfrac{31}{27}}}{2}}}{\sqrt[3]{\dfrac{1+\sqrt{\dfrac{31}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\dfrac{1-\sqrt{\dfrac{31}{27}}}{2}}}$

On peut donc choisir $x = \sqrt[3]{\dfrac{1+\sqrt{\dfrac{31}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\dfrac{1-\sqrt{\dfrac{31}{27}}}{2}}$ et $y = \dfrac{1 - \sqrt[3]{\dfrac{1+\sqrt{\dfrac{31}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\dfrac{1-\sqrt{\dfrac{31}{27}}}{2}}}{\sqrt[3]{\dfrac{1+\sqrt{\dfrac{31}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\dfrac{1-\sqrt{\dfrac{31}{27}}}{2}}}$

Pour ceux qui aiment les matrices

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{bmatrix}$ en posant $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ et $X_n = \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{bmatrix}$, on a $AX_n = X_{n+1}$ soit $A^n X_0 = X_n$.
Or $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ q \\ q^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ q^2 \\ 1-q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ q^2 \\ q^3 \end{bmatrix} = q\begin{bmatrix} 1 \\ q \\ q^2 \end{bmatrix}$. Ainsi q est une valeur propre de A et $\begin{bmatrix} 1 \\ q \\ q^2 \end{bmatrix}$ un vecteur propre et $a_n = q^n$.
On peut aussi utiliser le polynôme caractéristique $det(A - \lambda I) = \lambda^3 + \lambda - 1$

Maintenant il convient de montrer l'unicité de la solution

Par l'absurde, on va supposer qu'il existe une autre solution $\begin{cases} b_0 = 1 \\ b_1 = x \\ b_2 = y \\ b_{n+3} = b_n - b_{n+1} \end{cases}$

Considérons la famille de suite $c_{t,n} = (1-t)a_n + tb_n$ avec $t \in [0;1]$.
Dans l'espace des suites, on peut voir $c_{t,n}$ comme le segment entre a_n et b_n. Ainsi si t est petit $c_{t,n}$ est proche de a_n.
Tout d'abord on va montrer que $c_{t,n}$ comme est aussi solution du problème pour tout $t \in [0;1]$.
$c_{t,0} = (1-t)a_0 + tb_0 = 1 - t + t = 1$, $c_{t,n}$ est entre a_n et b_n donc est strictement positif.
$c_{t,n+3} = (1-t)a_{n+3} + tb_{n+3} = (1-t)(a_n - a_{n-1}) + t(b_n - b_{n+1}) = (1-t)a_n + tb_n - ((1-t)a_{n+1} + tb_{n+1}) = c_{t,n+1} - c_{t,n+1}$

Ainsi on peut choisir x et y proche de q et q^2 respectivement.
On a différents cas suivant que $x < q$ ou $x = q$ ou $x > q$ et $y < q^2$ ou $y = q^2$ ou $y > q^2$.
Mais on va voir qu'ils ne sont pas si différents.

Commençons par le cas où $x < q$, $y < q^2$ on peut choisir alors $\varepsilon > 0$, ε petit et $\begin{cases} b_0 = 1 \\ b_1 = q - \varepsilon \\ b_2 = q^2 - \varepsilon \\ b_{n+3} = b_n - b_{n+1} \end{cases}$

Il vient $\begin{cases} b_3 = 1 - (q - \varepsilon) = 1 - q + \varepsilon = q^3 + \varepsilon \\ b_4 = (q - \varepsilon) - (q^2 - \varepsilon) = q - q^2 = q^4 \\ b_5 = q^2 - \varepsilon - (q^3 - \varepsilon) = q^2 - q^3 - 2\varepsilon = q^5 - 2\varepsilon \\ b_{n+3} = b_n - b_{n+1} > 0 \end{cases}$

Donc comme b_n est positive décroissante elle est convergente et en passant à limite $b_{n+3} = b_n - b_{n+1}$ on
a que $lim\, b_n = 0$.
On montre rapidement par récurrence que $b_n = q^n + d_n\varepsilon$.
$b_{n+3} = q^{n+3} + d_{n+3}\varepsilon = q^n + d_n\varepsilon - (q^{n+1} + d_{n+1}\varepsilon)$ soit $q^{n+3} + q^{n+1} - q^n + (d_{n+3} + d_{n+1} - d_n)\varepsilon = 0$ or
$q^{n+3} + q^{n+1} - q^n = q^n(q^3 + q - 1) = q^n \times 0 = 0$ et $\varepsilon > 0$, on doit donc choisir $d_{n+3} = d_n - d_{n-1}$
On a comme précédemment

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_n \\ d_{n+1} \\ d_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{n+1} \\ d_{n+2} \\ d_{n+3} \end{bmatrix} \text{ avec } \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Or $det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$ donc 0 n'est pas une valeur propre de $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ainsi d_n ne peut pas être nul à partir d'un certain rang. Donc d_n est un entier souvent non nul.
Mais $b_n = q^n + d_n\varepsilon$ et $lim\, q^n = 0$ donc b_n ne peut pas converger vers 0 et on a une contradiction.

Les autres cas sont similaires

Si $x < q$, $y = q^2$ on peut choisir alors $\varepsilon > 0$, ε petit et $\begin{cases} b_0 = 1 \\ b_1 = q - \varepsilon \\ b_2 = q^2 \end{cases}$

Pour les mêmes raisons que précédemment mais cette fois avec $\begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ on a une contradiction.

Si $x < q \ , y > q^2$ on peut choisir alors $\varepsilon > 0$, ε petit et $\begin{cases} b_0 = 1 \\ b_1 = q - \varepsilon \\ b_2 = q^2 + \varepsilon \end{cases}$, cette fois $\begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Si $x = q \ , y < q^2$ on peut choisir alors $\varepsilon > 0$, ε petit et $\begin{cases} b_0 = 1 \\ b_1 = q \\ b_2 = q^2 - \varepsilon \end{cases}$, cette fois $\begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Si $x = q \ , y > q^2$ on peut choisir alors $\varepsilon > 0$, ε petit et $\begin{cases} b_0 = 1 \\ b_1 = q \\ b_2 = q^2 + \varepsilon \end{cases}$, cette fois $\begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Si $x > q \ , y < q^2$ on peut choisir alors $\varepsilon > 0$, ε petit et $\begin{cases} b_0 = 1 \\ b_1 = q + \varepsilon \\ b_2 = q^2 - \varepsilon \end{cases}$, cette fois $\begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Si $x > q \ , y = q^2$ on peut choisir alors $\varepsilon > 0$, ε petit et $\begin{cases} b_0 = 1 \\ b_1 = q + \varepsilon \\ b_2 = q^2 \end{cases}$, cette fois $\begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Si $x > q \ , y > q^2$ on peut choisir alors $\varepsilon > 0$, ε petit et $\begin{cases} b_0 = 1 \\ b_1 = q + \varepsilon \\ b_2 = q^2 + \varepsilon \end{cases}$, cette fois $\begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

On a toujours la même contradiction.

Ainsi la solution $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = q \\ a_2 = q^2 \\ a_{n+3} = a_n - a_{n+1} \end{cases}$ est la seule solution rendant la suite toujours strictement positive.