Problème AuFilDesMaths_539-1

Cette table pentagonale est citée dans la brochure Angles 5ème de l'IREM&S de Poitiers pour l'enseignement des mathématiques par les grandeurs au collège, parue en 2014.

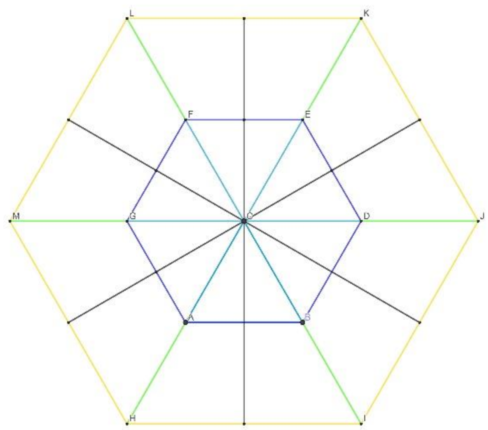
Le directeur de l'entreprise et le designer à l'origine qui ont créé cette table pentagonale m'ont autorisé à utiliser leurs documents sources la concernant.

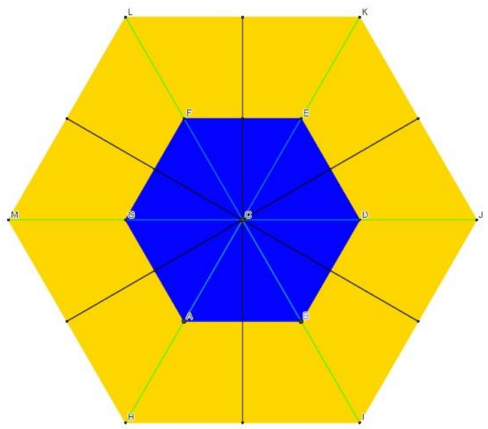
méthode 1 de JPM

Calculer l'aire de cette table est exprimable de deux manières selon l'unité choisie. Je vais proposer une solution qui contient ces deux réponses. La configuration qui m'a donné la solution après 1 minute de lecture du problème 539-1, est immédiatement tirée de la proposition par les créateurs : avec 6 tables pentagonales ils créent un hexagone régulier contenant en son centre un vide lui-même hexagonal régulier. L'aire d'une table est donc le sixième de la différence des aires d'un hexagone régulier de côté 2AB et de l'hexagone régulier de côté AB.

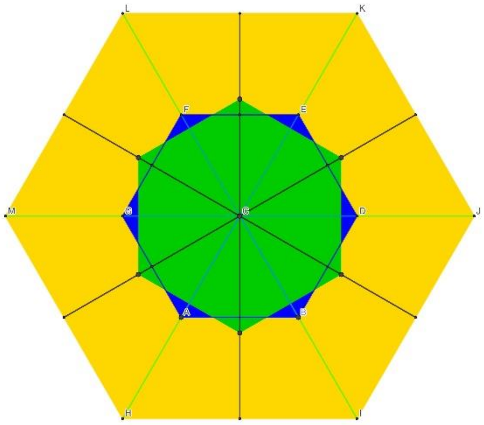
Chacun sait que le sixième de l'hexagone régulier est le triangle équilatéral.

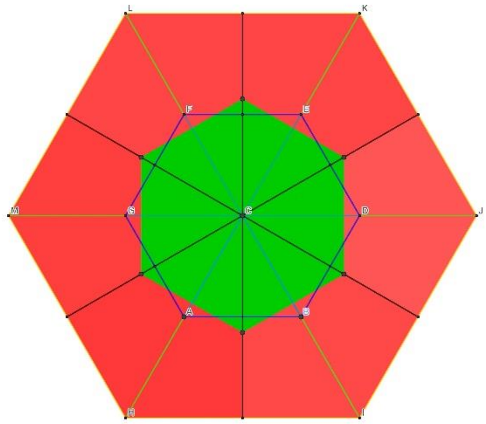
La génèse des tables pentagonales est compréhensible à partir de l'hexagone de côté 2AB avec en son centre l'hexagone de côté AB, ayant les mêmes diagonales.





En ôtant le plus petit du plus grand, ces diagonales découpent la couronne hexagonale en 6 trapèzes isocèles avec 3 côtés de mesure AB et 1 côté de mesure 2AB. Si maintenant on reprend le grand hexagone, et on fait tourner au centre le petit de 30°, les diagonales du petit hexagone coïncident avec les médiatrices du grand, et la partie entre les deux hexagones est ainsi découpées en 6 pentagones, identiques à celui étudié.





En conclusion, le trapèze isocèle et le pentagone ont la même aire.

Le trapèze isocèle est facile à découper en 3 triangles équilatéraux, de côté AB, ou bien obtenu par différence entre un grand et un petit triangle équilatéral.

Réponse 1 : Aire de la table pentagonale = Aire triangle équilatéral de côté 2AB – Aire du triangle équilatéral de côté AB.

Aire de la table pentagonale = 3 aire de du triangle équilatéral de côté AB (1ère unité d'aire)

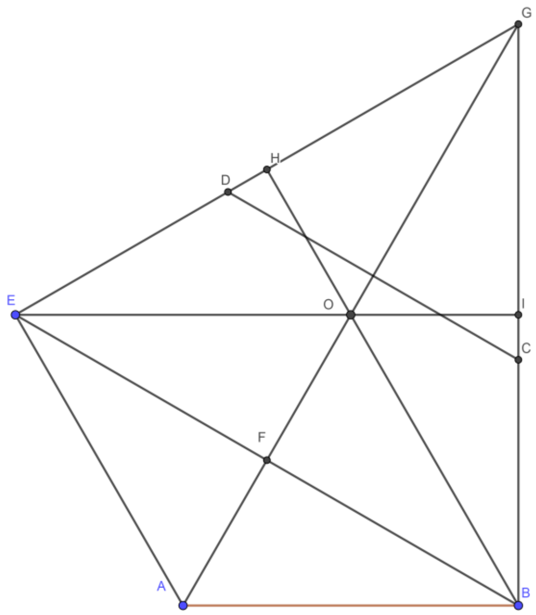
Cette première partie est accessible vers la fin de cycle 3, et la suivante attendra le cycle 4 et la 4ème.

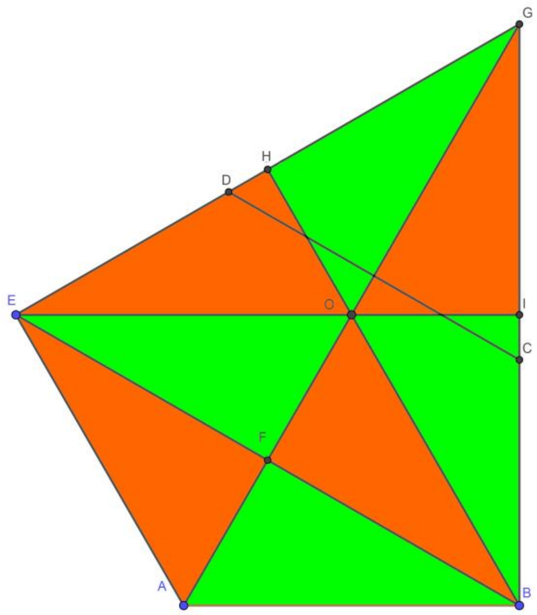
Maintenant pour le calcul avec comme unité d'aire le cm².

Aire de la table pentagonale = $3 \times \frac{1}{2} \times AB \times AB\frac{\sqrt{3}}{2}$ = $\frac{3\sqrt{3}}{4}AB^2$

Avec AB = 60cm, l'aire est $2700\sqrt{3}$ en cm².

méthode 2 de JPM, par décomposition-recomposition





L’étude des angles du pentagone ABCDE et la construction dans celui-ci du triangle équilatéral ABO, est complétée par le triangle CDG, en prolongeant les côtés [BC] et [ED].

L’étude des angles amène à considérer que DCG et EBG sont deux triangles équilatéraux.

On prouvera facilement que ABOE est un losange, ainsi que la nature des bissectrices (AG) pour EAB, (BH) pour EBG, (EI) pour BEG. Et que de plus elles sont concourantes en O. Ce sont donc les axes de symétrie du triangle BEG équilatéral.

Le découpage de ABOE en 4 triangles rectangles de même aire tous de sommet F, et de EBG en 6 triangles rectangles de même aire que les précédents tous de sommet O. On a un pavage qui permet par constater que le pentagone ABCDE et le triangle équilatéral BEG ont même aire, et que c’est le triple de l’aire du triangle équilatéral ABO.

Aire de la table pentagonale = 3 aire de du triangle équilatéral de côté AB

Retour à la méthode 1 pour les calculs.

méthode 3 de Jean-Paul Guichard, avec la même recomposition du triangle équilatéral

L’étude géométrique est la même pour l’identification de la recomposition du triangle équilatéral BEG, en retirant le triangle isocèle BAE du pentagone ABCDE, et en recomposant le triangle CDG équilatéral, avec CD = AB.

Aire du pentagone ABCDE = Aire du triangle équilatéral de côté BE

BE est le double de BF, et comme BF = $AB\frac{\sqrt{3}}{2}$, alors BE = $AB\sqrt{3}$

Aire du triangle équilatéral de côté BE = $\frac{1}{2}BE^2\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \times AB^2 \times \sqrt{3}^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}AB^2$

Aire du pentagone ABCDE = $\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{4}AB^2}$

Retour à la méthode 1 pour la fin du calcul.