ÉTUDE D'UNE ÉQUATION EN NOMBRES ENTIERS

On cherche les solutions (a, b, c) en entiers naturels de l'équation :

$$a^2 + 2b^2 + 3c^2 = 6abc \qquad (1)$$

Il y a une solution qui s'impose d'emblée : $U = (1,1,1)$, et les solutions possibles ne contiennent que des entiers strictement positifs.

Considérant l'équation (1), à (b, c) fixés, comme étant du second degré en l'inconnue a, on peut, chaque fois que l'on trouve une solution (a, b, c), chercher la seconde racine de cette équation du second degré :

$$X^2 - (6bc)X + (2b^2 + 3c^2) = 0 \qquad (2)$$

La somme des racines étant égale à $6bc$, l'autre racine est $6bc - a$, et l'on a bien, dès que (1) est satisfaite,

$$X^2 - (6bc)X + (2b^2 + 3c^2) = (X - a)(X - (6bc - a))$$

On note que, le produit des deux racines étant strictement positif, dès lors qu'une racine est un entier positif, l'autre est aussi réelle positive, et entière d'après le calcul fait.
Par conséquent :

à toute solution $S = (a, b, c)$ est associée une autre solution : $A(S) = (6bc - a, b, c)$

Remarque : l'application *A* est involutive dans l'ensemble des racines.

On peut prouver que cette $A(S)$ est toujours « nouvelle ». La fonction du second degré de la formule (2) présente son minimum en $X = 3bc$, et ce minimum vaut :

$$-9\left(b^2 - \frac{1}{3}\right)\left(c^2 - \frac{2}{9}\right) + \frac{2}{3}$$

Il est donc strictement négatif, donc $S\ et\ A(S)$ sont nécessairement distinctes.

Mais on peut suivre un raisonnement identique en échangeant les inconnues, et on trouve alors deux autres involutions *(B,C)* de l'ensemble des solutions :

à toute solution $S = (a, b, c)$ est associée une autre solution : $B(S) = (a, 3ac - b, c)$
à toute solution $S = (a, b, c)$ est associée une autre solution : $C(S) = (a, b, 2ab - c)$

Partant de la solution initiale $U = (1,1,1)$, on peut ainsi construire un arbre, dans lequel chaque nouvelle solution aura deux « vraies » descendantes, par les deux involutions autres que celle qui l'a finalement produite.

Comme $C(U) = U$, la descendance directe de *U* est $A(U) = (5,1,1)$ et $B(U) = (1,2,1)$. Ensuite, viennent $BA(U) = (5,14,1)$ et $CA(U) = (5,1,9)$, descendance directe de $A(U)$, et $CB(U) = (1,2,3)$ et $AB(U) = (11,2,1)$, descendance de $B(U)$. L'évolution ultérieure de l'arbre ne m'a pas paru faire apparaître de phénomène particulièrement remarquable.

Une première question est alors de savoir s'il existe des solutions n'appartenant pas aux descendants de *U* selon le procédé ainsi décrit (en fait : peut-il exister un autre arbre de solutions ?). Une autre question est de savoir si un même triplet pourrait apparaître deux fois dans des branches différentes de l'arbre. De manière intuitive, je réponds non à ces deux questions qui restent pour moi ouvertes.

Le tableau qui suit donne les 127 solutions générées par (1,1,1) en au plus six étapes, et pour chacune la suite des étapes correspondantes.

Elles sont rangées dans l'ordre binaire, en utilisant le code :

Après C, si A : 0, si B :1

Après A : si B :0, si C :1

Après B : si C :0, si A :1

La solution initiale *U* étant considérée comme image par C (d'elle-même).

a	b	c						
1	1	1						
5	1	1	A					
1	2	1	B					
5	14	1	A	B				
5	1	9	A	C				
1	2	3	B	C				
11	2	1	B	A				
5	14	139	A	B	C			
79	14	1	A	B	A			
49	1	9	A	C	A			
5	134	9	A	C	B			
35	2	3	B	C	A			
1	7	3	B	C	B			
11	31	1	B	A	B			
11	2	43	B	A	C			
11671	14	139	A	B	C	A		
5	2071	139	A	B	C	B		
79	223	1	A	B	A	B		
79	14	2211	A	B	A	C		
49	1322	9	A	C	A	B		
49	1	89	A	C	A	C		
5	134	1331	A	C	B	C		
7231	134	9	A	C	B	A		
35	313	3	B	C	A	B		
35	2	137	B	C	A	C		
1	7	11	B	C	B	C		
125	7	3	B	C	B	A		
11	31	681	B	A	B	C		
175	31	1	B	A	B	A		
505	2	43	B	A	C	A		

11	1417	43	B	A	C	B		
11671	4866793	139	A	B	C	A	B	
11671	14	326649	A	B	C	A	C	
5	2071	20571	A	B	C	B	C	
1727209	2071	139	A	B	C	B	A	
79	223	35233	A	B	A	B	C	
1259	223	1	A	B	A	B	A	
185645	14	2211	A	B	A	C	A	
79	523993	2211	A	B	A	C	B	
49	1322	129547	A	C	A	B	C	
71339	1322	9	A	C	A	B	A	
485	1	89	A	C	A	C	A	
49	13082	89	A	C	A	C	B	
1070119	134	1331	A	C	B	C	A	
5	19831	1331	A	C	B	C	B	
7231	195103	9	A	C	B	A	B	
7231	134	1937899	A	C	B	A	C	
35	313	21907	B	C	A	B	C	
5599	313	3	B	C	A	B	A	
1609	2	137	B	C	A	C	A	
35	14383	137	B	C	A	C	B	
461	7	11	B	C	B	C	A	
1	26	11	B	C	B	C	B	
125	1118	3	B	C	B	A	B	
125	7	1747	B	C	B	A	C	
126655	31	681	B	A	B	C	A	
11	22442	681	B	A	B	C	B	
175	494	1	B	A	B	A	B	
175	31	10849	B	A	B	A	C	
505	65143	43	B	A	C	A	B	
505	2	1977	B	A	C	A	C	
11	1417	31131	B	A	C	B	C	
365575	1417	43	B	A	C	B	A	
11671	4866793	113600682067	A	B	C	A	B	C
4058893691	4866793	139	A	B	C	A	B	A
27426845	14	326649	A	B	C	A	C	A
11671	11436961423	326649	A	B	C	A	C	B
255615241	2071	20571	A	B	C	B	C	A
5	306494	20571	A	B	C	B	C	B
1727209	720244082	139	A	B	C	B	A	B
1727209	2071	7154099539	A	B	C	B	A	C
47141675	223	35233	A	B	A	B	C	A
79	8349998	35233	A	B	A	B	C	B
1259	3554	1	A	B	A	B	A	B

1259	223	561513	A	B	A	B	A	C
185645	1231383271	2211	A	B	A	C	A	B
185645	14	5195849	A	B	A	C	A	C
79	523993	82788683	A	B	A	C	B	C
6951291059	523993	2211	A	B	A	C	B	A
1027566755	1322	129547	A	C	A	B	C	A
49	19042087	129547	A	C	A	B	C	B
71339	1924831	9	A	C	A	B	A	B
71339	1322	188620307	A	C	A	B	A	C
485	129494	89	A	C	A	C	A	B
485	1	881	A	C	A	C	A	C
49	13082	1281947	A	C	A	C	B	C
6985739	13082	89	A	C	A	C	B	A
1070119	4272985033	1331	A	C	B	C	A	B
1070119	134	286790561	A	C	B	C	A	C
5	19831	196979	A	C	B	C	B	C
158370361	19831	1331	A	C	B	C	B	A
7231	195103	2821579577	A	C	B	A	B	C
10528331	195103	9	A	C	B	A	B	A
1558063565	134	1937899	A	C	B	A	C	A
7231	42038842873	1937899	A	C	B	A	C	B
41141311	313	21907	B	C	A	B	C	A
35	2299922	21907	B	C	A	B	C	B
5599	50078	3	B	C	A	B	A	B
5599	313	3504971	B	C	A	B	A	C
1609	661297	137	B	C	A	C	A	B
1609	2	6299	B	C	A	C	A	C
35	14383	1006673	B	C	A	C	B	C
11822791	14383	137	B	C	A	C	B	A
461	15206	11	B	C	B	C	A	B
461	7	6443	B	C	B	C	A	C
1	26	41	B	C	B	C	B	C
1715	26	11	B	C	B	C	B	A
125	1118	279497	B	C	B	A	B	C
19999	1118	3	B	C	B	A	B	A
73249	7	1747	B	C	B	A	C	A
125	655118	1747	B	C	B	A	C	B
126655	258756134	681	B	A	B	C	A	B
126655	31	7851929	B	A	B	C	A	C
11	22442	493043	B	A	B	C	B	C
91698001	22442	681	B	A	B	C	B	A
175	494	172899	B	A	B	A	B	C
2789	494	1	B	A	B	A	B	A
2017739	31	10849	B	A	B	A	C	A

175	5695694	10849	B	A	B	A	C	B
505	65143	65794387	B	A	C	A	B	C
16806389	65143	43	B	A	C	A	B	A
23219	2	1977	B	A	C	A	C	A
505	2995153	1977	B	A	C	A	C	B
264675751	1417	31131	B	A	C	B	C	A
11	1025906	31131	B	A	C	B	C	B
365575	47157758	43	B	A	C	B	A	B
365575	1417	1036039507	B	A	C	B	A	C