539-3 Rester toujours positif

Les suites vérifiant la relation de récurrence de l'énoncé sont des combinaisons linéaires de trois suites géométriques dont les raisons sont les trois racines du polynôme $P(X) = X^3 + X - 1$

La fonction polynôme P, strictement croissante sur **R**, a une seule racine réelle α.

Comme $P(0) = -1$ et $P(1) = 1$, $0<\alpha<1$

Les deux autres racines de P sont complexes non réelles conjuguées : $\beta = \rho \cdot e^{i\theta}$ et $\overline{\beta} = \rho \cdot e^{-i\theta}$

$a_n = u \cdot \alpha^n + (v + iw) \cdot \beta^n + (v - iw) \cdot \overline{\beta}^n$, où u, v, w sont des constantes réelles
$a_0 = u + 2 \cdot v = 1$

Le choix $(u, v, w) = (1, 0, 0)$ conduit à la suite $a_n = \alpha^n$, dont tous les termes sont strictement positifs.

Nous allons montrer que c'est le seul choix possible pour que tous les termes soient strictement positifs.

Nous montrons d'abord que les angles θ et π sont incommensurables.

La somme des trois racines de P est nulle et leur produit vaut 1: $\begin{cases} \alpha + 2 \cdot \rho \cdot \cos\theta = 0 \\ \alpha \cdot \rho^2 = 1 \end{cases}$

Donc : $2 \cdot \cos\theta = -\dfrac{\alpha}{\rho} = -\alpha\sqrt{\alpha}$

$2 \cdot \cos 2\theta = 4 \cdot \cos^2\theta - 2 = \alpha^3 - 2$

En posant $X = e^{2i\theta}$ et $Y = X + \dfrac{1}{X} = 2 \cdot \cos 2\theta$, on obtient : $\alpha^3 = Y + 2$

Comme $\alpha = 1 - \alpha^3$, $\alpha^3 = (1 - \alpha^3)^3 = 1 - 3\alpha^3 + 3\alpha^6 - \alpha^9$ et $\alpha^9 - 3\alpha^6 + 4\alpha^3 - 1 = 0$

Donc : $(Y + 2)^3 - 3(Y + 2)^2 + 4(Y + 2) - 1 = Y^3 + 3Y^2 + 4Y + 3 = 0$

En multipliant par X^3, on obtient :

$$Q(X) = (X^2 + 1)^3 - 3X(X^2 + 1)^2 + 4X^2(X^2 + 1) - 1 = X^6 + 3X^5 + 7X^4 + 9X^3 + 7X^2 + 3 + 1 = 0$$

Si les angles θ et π étaient commensurables, alors 2θ et π le seraient aussi et le polynôme Q serait un polynôme cyclotomique Φ_n tel que l'indicatrice d'Euler $\varphi(n) = 6$.

Les valeurs possibles pour n sont : 7, 14, 9, 18.

Or : $\begin{cases} \Phi_7(X) = X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 \\ \Phi_{14}(X) = X^6 - X^5 + X^4 - X^3 + X^2 - X + 1 \\ \Phi_9(X) = X^6 + X^3 + 1 \\ \Phi_{18}(X) = X^6 - X^3 + 1 \end{cases}$

Aucun de ces polynômes cyclotomiques ne coïncide avec p

Donc les angles θ et π sont incommensurables.

Les termes de la suite $\left(e^{i\,n\,\theta}\right)_{n\in N}$ forment donc une partie partout dense du cercle trigonométrique.

Revenons à la suite (a_n) :

$$\begin{aligned} a_n &= u\cdot\alpha^n + (v + iw)\cdot\beta^n + (v - iw)\cdot\overline{\beta}^n \\ &= \rho^n\left(u\cdot\frac{\alpha^n}{\rho^n} + 2v\cdot\cos\,(n\theta) - 2w\cdot\sin\,(n\theta)\right) \end{aligned}$$

Supposons les coefficients v et w non simultanément nuls

Les quatre cas suivants sont possibles :

- Cas I : v>0
- Cas II : v< 0
- Cas III : w>0
- Cas IV : w<0

Dans le premier cas, on peut choisir une suite d'indices $(n_k)_{k\in N}$ telle que : $\begin{cases} \lim\limits_{k\to+\infty} \cos\,(n_k\cdot\theta) = -1 \\ \lim\limits_{k\to+\infty} \sin\,(n_k\cdot\theta) = 0 \end{cases}$

Alors : $\lim\limits_{k\to+\infty} a_{n_k} = -\infty$ et la suite comportera des termes strictement négatifs

Dans le deuxième cas, on peut choisir une suite d'indices $(n_k)_{k\in N}$ telle que : $\begin{cases} \lim\limits_{k\to+\infty} \cos\,(n_k\cdot\theta) = 1 \\ \lim\limits_{k\to+\infty} \sin\,(n_k\cdot\theta) = 0 \end{cases}$

Alors : $\lim\limits_{k\to+\infty} a_{n_k} = -\infty$ et la suite comportera des termes strictement négatifs

Dans le troisième cas, on peut choisir une suite d'indices $(n_k)_{k\in N}$ telle que : $\begin{cases} \lim\limits_{k\to+\infty} \cos\,(n_k\cdot\theta) = 0 \\ \lim\limits_{k\to+\infty} \sin\,(n_k\cdot\theta) = -1 \end{cases}$

Alors : $\lim\limits_{k\to+\infty} a_{n_k} = -\infty$ et la suite comportera des termes strictement négatifs

Dans le quatrième cas, on peut choisir une suite d'indices $(n_k)_{k\in N}$ telle que : $\begin{cases} \lim\limits_{k\to+\infty} \cos\,(n_k\cdot\theta) = 0 \\ \lim\limits_{k\to+\infty} \sin\,(n_k\cdot\theta) = 1 \end{cases}$

Alors : $\lim\limits_{k\to+\infty} a_{n_k} = -\infty$ et la suite comportera des termes strictement négatifs