539-4 Un duo de coniques

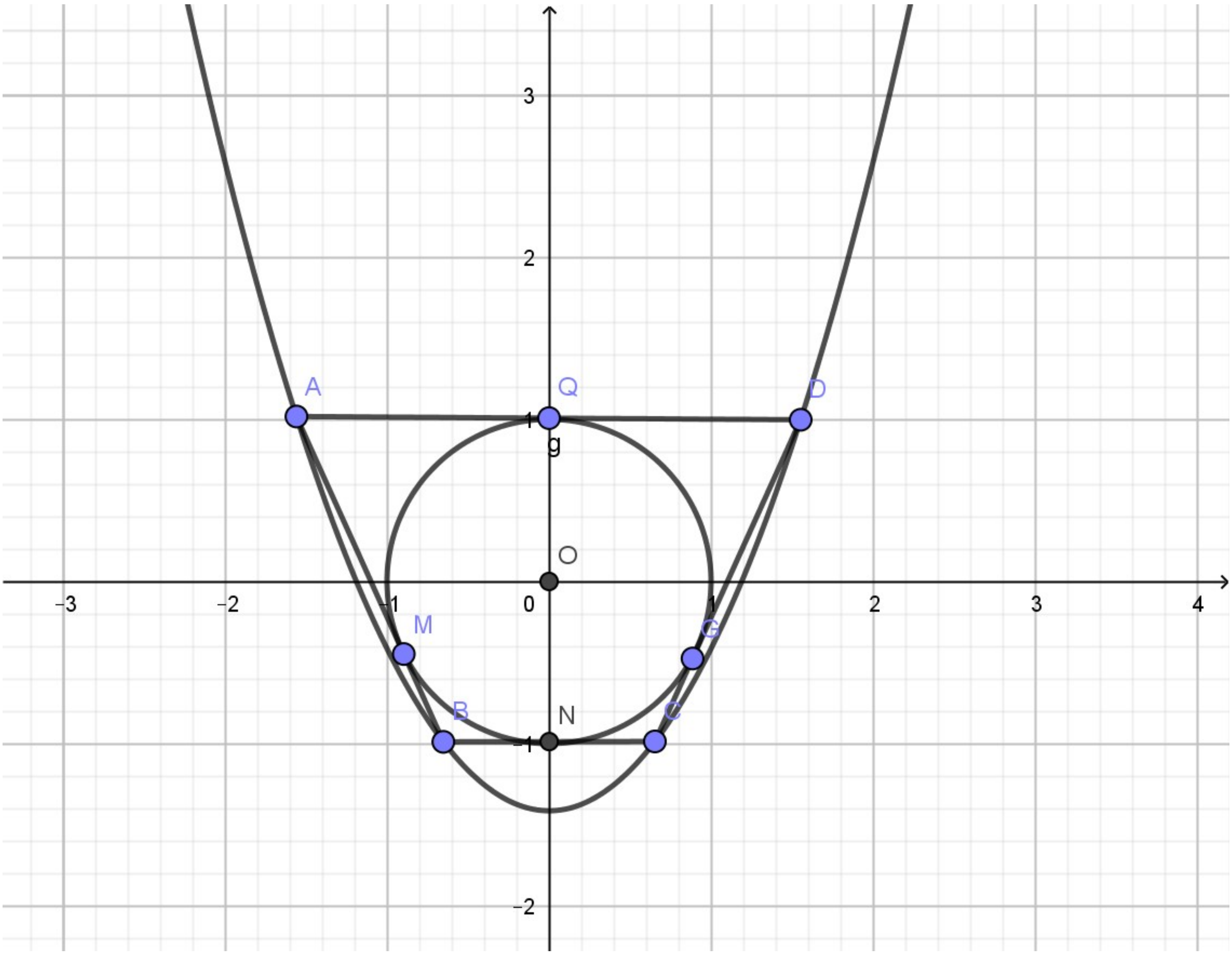
Deux quadrilatères particuliers

Voici deux quadrilatères ABCD particuliers, inscrits dans la parabole $\mathcal{P}$ et circonscrits au cercle $\mathcal{U}$:

Exemple 1

Les points A et D sont les points d'ordonnée 1 de la parabole

Les points A et D sont les points d'ordonnée -1 de la parabole

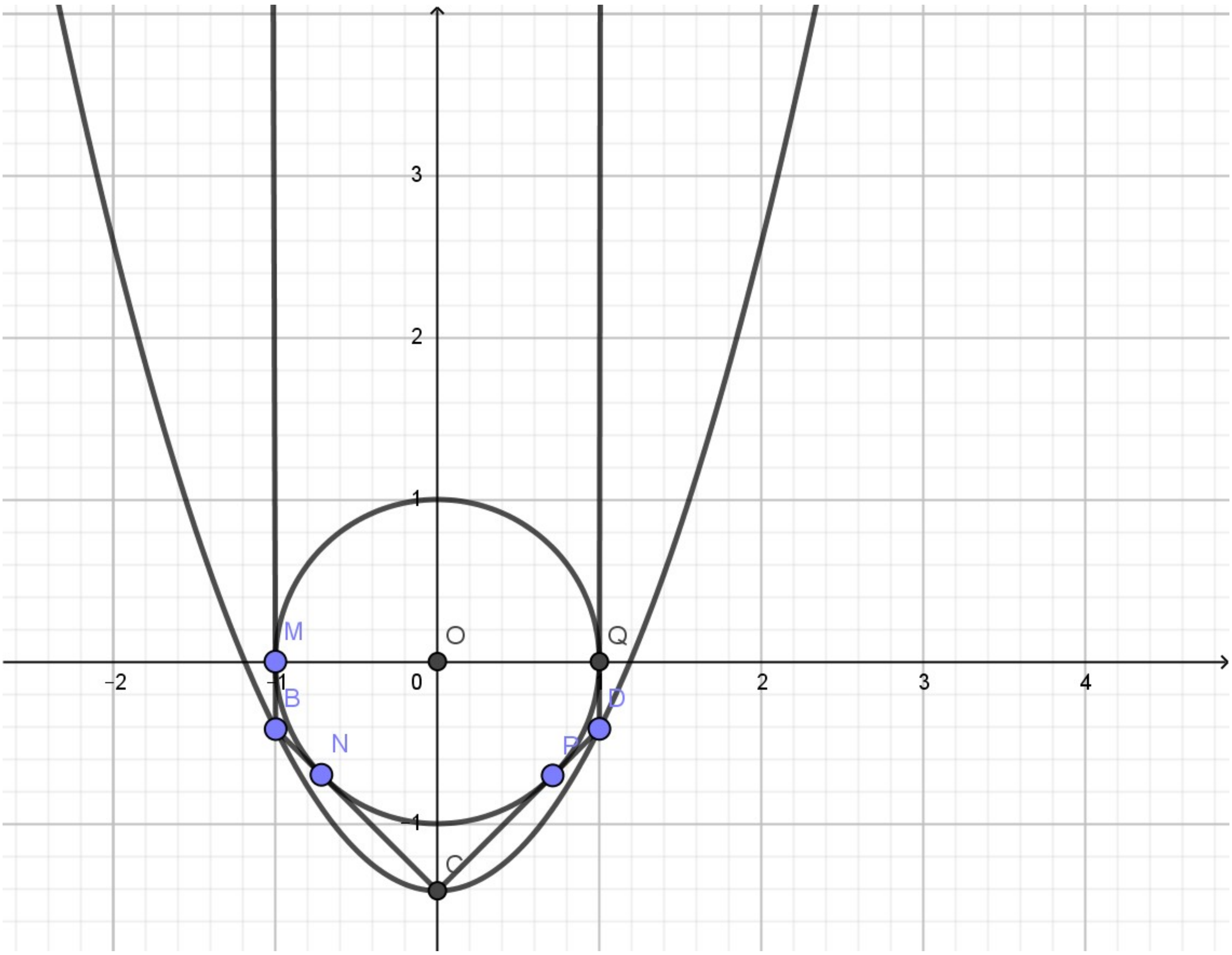


Exemple 2

Le point A est le point à l'infini de la parabole

Les points B et D sont les points d'abscisse -1 et 1 de la parabole

Le point C est le sommet de la parabole



Dans ces exemples les diagonales (AC) et (BD) se coupent au point K de coordonnées $(0,1-\sqrt{2})$

L'Alsacien Jean-Pierre Friedelmeyer sait que lorsqu'on a résolu un problème, on peut s'écrier avec joie en allemand : « Die Nuß ist geknackt ! » (« La noix est cassée ! »).

On pourrait ici casser la noix avec un gros marteau-pilon : le grand théorème de Poncelet pour les quadrilatères :

S'il existe un quadrilatère inscrit dans une conique Γ et circonscrit à une conique Γ', alors il en existe une infinité, l'un des sommets pouvant être choisit librement sur Γ.

On va toutefois résoudre le problème de façon élémentaire avec un simple casse-noix.

QUESTIONS 1 et 2

1) La tangente (AB)

Soient A et B deux points de la parabole, d'abscisses a et b.

On cherche la condition sur a et b pour la droite (AB) soit tangente au cercle.

L'équation de la droite (AB) est : $y=(a+b)\cdot x-ab-\sqrt{2}$

En remplaçant y en fonction de x dans l'équation du cercle, on obtient :

$$\left((a+b)^2+1\right)\cdot x^2-2\cdot(a+b)\cdot(ab+\sqrt{2})\cdot x+(ab-\sqrt{2})^2-1=0$$

La droite (AB) est tangente au cercle si et seulement si le discriminant réduit Δ' de ce polynôme du second degré en x est nul :

$$-\Delta'=a^2b^2-a^2-b^2+2\cdot(\sqrt{2}-1)\cdot ab+1=0 \qquad (1)$$

L'équation en x fournit l'abscisse du point de contact M de la droite (AB) avec le cercle :

Les coordonnées de M sont donc : $M\left|\begin{array}{l} m_1=\dfrac{(a+b)\cdot(ab+\sqrt{2})}{(a+b)^2+1} \\[2ex] m_2=-\dfrac{(ab+\sqrt{2})}{(a+b)^2+1}\end{array}\right.$

2) Les autres tangentes

Soit K le point de coordonnées$(0,1-\sqrt{2})$, découvert dans les exemples ci-dessus.

Soit C le point d'intersection, autre qua A, de la parabole et de la droite (AK).

Soit D le point d'intersection, autre qua B, de la parabole et de la droite (BK).

L'équation de la droite (AK) est : $y = \frac{a^2 - 1}{a} \cdot x + 1 - \sqrt{2}$

En remplaçant y en fonction de x dans l'équation de la parabole, on obtient : $ax^2 + (1 - a^2) \cdot x - a = 0$

L'abscisse de C est la solution autre que a : $x = -\frac{1}{a}$

De façon analogue, l'abscisse de D est : $x = -\frac{1}{b}$

On vérifie que si la condition (1) est satisfaite pour a et b, elle l'est aussi pour b et $-\frac{1}{a}$, ainsi que pour $-\frac{1}{a}$ et $-\frac{1}{b}$, ainsi que pour $-\frac{1}{b}$ et a.

Donc si la droite (AB) est tangente au cercle, les droites (BC), (CD) et (DA) le sont aussi.

QUESTION 3

Soit E le point d'intersection des droites (AB) et (CD).

Les équations des deux droites sont : $\begin{cases} y = (a+b) \cdot x - ab - \sqrt{2} \\ y = -\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \cdot x - \frac{1}{ab} - \sqrt{2} \end{cases}$

Les coordonnées de E : $E \left| \begin{array}{l} \frac{ab - 1}{a + b} \\ -1 - \sqrt{2} \end{array} \right.$

Soit F le point d'intersection des droites (AD) et (BC).

Les coordonnées de F se déduisent de celles E par l'échange de b et $-\frac{1}{b}$: $F \left| \begin{array}{l} -\frac{a + b}{ab - 1} \\ -1 - \sqrt{2} \end{array} \right.$

Les points E et F appartiennent à la droite horizontale Δ, d'équation : $y = -1 - \sqrt{2}$

Les points M, N, P, Q sont les points de contact du cercle avec les droites (AB), 'BC), (CD), (DA).

Des coordonnées de M, on déduit : celles de N par l'échange de a et $-\frac{1}{a}$

celles de P par l'échange de a et $-\frac{1}{a}$, puis de b et $-\frac{1}{b}$

celles de Q par l'échange de b et $-\frac{1}{b}$

$$N \left| \begin{aligned} n_1 &= -\frac{(ab-1)\cdot(b-a\sqrt{2})}{(ab-1)^2+a^2} \\ n_2 &= \frac{a\cdot(b-a\sqrt{2})}{(ab-1)^2+a^2} \end{aligned} \right. \qquad P \left| \begin{aligned} p_1 &= -\frac{(a+b)\cdot(1+ab\sqrt{2})}{(a+b)^2+a^2b^2} \\ p_2 &= -\frac{ab\cdot(1+ab\sqrt{2})}{(a+b)^2+a^2b^2} \end{aligned} \right. \qquad Q \left| \begin{aligned} q_1 &= -\frac{(ab-1)\cdot(a-b\sqrt{2})}{(ab-1)^2+b^2} \\ q_2 &= \frac{b\cdot(a-b\sqrt{2})}{(ab-1)^2+b^2} \end{aligned} \right.$$

On va calculer l'abscisse x du point d'intersection des droites (MN) et Δ, qui vérifie l'équation :

$$\begin{vmatrix} m_1-x & n_1-x \\ m_2+1+\sqrt{2} & n_2+1+\sqrt{2} \end{vmatrix} = 0$$

On obtient : $$x=(1+\sqrt{2})\cdot\frac{-a^2b^3-ab^4+a^2b+ab^2+b^3-2a-b}{-ab^3\sqrt{2}+a^2\sqrt{2}+(2\sqrt{2}-2)ab-\sqrt{2}}$$

On va calculer l'abscisse x' du point d'intersection des droites (PQ) et Δ, qui vérifie l'équation :

$$\begin{vmatrix} p_1-x' & q_1-x' \\ p_2+1+\sqrt{2} & q_2+1+\sqrt{2} \end{vmatrix} = 0$$

On obtient : $$x'=(1+\sqrt{2})\cdot\frac{-a^2b^3-2ab^4+a^2b+ab^2-b^3-a-b}{b\cdot(a^2b^3\sqrt{2}+(2-2\sqrt{2})ab^2-b^3\sqrt{2}+a)}$$

Donc : $$x'-x=(1+\sqrt{2})\cdot\frac{(b^2+1)\cdot(a^2b^3\sqrt{2}+ab^4\sqrt{2}-a^2b\sqrt{2}-(1+\sqrt{2})ab^2-b^3\sqrt{2}+(a+b)\sqrt{2})}{b\cdot(-a^2b^3+a^2\sqrt{2}+(2\sqrt{2}-2)ab-1)\cdot(a^2b^3\sqrt{2}+(2-2\sqrt{2})ab^2-b^3\sqrt{2}+a)}\cdot\Delta'$$

Où Δ' désigne le discriminant réduit de la condition (1), qui est nul.

On en déduit que $x'=x$ et que les droite (MN) et (PQ) se coupent en un point de la droite Δ.

En remplaçant a et b par $-\frac{1}{a}$ et $-\frac{1}{b}$, on montre de même que les droites(NP) et (QM) se coupent en un point de la droite Δ.