Problème 539-1

**Une table de bureau originale**

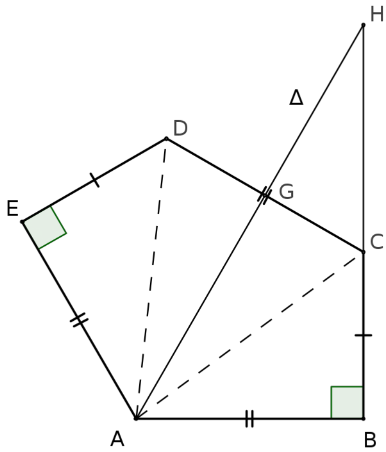
**Pierre-Alain Sallard**

Le problème consiste à déterminer l'aire du pentagone ABCDE qui vérifie par hypothèse les propriétés suivantes :

- AB = CD = EA = 60 cm
- BC = ED
- $\widehat{EAB} = 120°$ , $\widehat{ABC} = \widehat{DEA} = 90°$

On note :

- Δ la médiatrice du segment [CD] ;
- G le milieu du segment [BC] ;
- H le point d'intersection de la droite (BC) et de Δ.




On démontre en annexe le lemme suivant :

*Lemme 1* : La droite Δ est un axe de symétrie du pentagone ABCDE.

On déduit de ce lemme que :

- $\widehat{BAH} = 60°$ , d'où on tire que $\widehat{AHB} = 30°$ puis que $\widehat{GCH} = 60°$ ;
- et que la droite Δ partage le pentagone en deux parties d'aires égales.

Ce dernier point revient à dire que Aire (ABCDE) = 2 × Aire (ABCG) , d'où il vient que

$$
\begin{aligned}
\text{Aire (ABCDE)} &= 2 \times (\text{Aire (ABH)} - \text{Aire (GCH)}) \\
&= 2 \times (\tfrac{1}{2} \times AB \times BH - \tfrac{1}{2} \times GC \times GH) \\
&= AB \times BH - GC \times GH \\
&= \tan(60°) \times AB^2 - \tan(60°) \times GC^2 \\
&= \sqrt{3} \times (60^2 - 30^2) \\
&= 270\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

*Preuve du lemme 1.*

Par définition de Δ, les points C et D sont symétriques par rapport à Δ.

A est équidistant de D et de C : ceci résulte de l'application du théorème de Pythagore aux triangles rectangles ABC et AED qui sont congruents par hypothèses. Alors A ∈ Δ.

Montrons que B et E sont symétriques par rapport à Δ. D'une part, $\widehat{GAC} = \widehat{GAD}$ car C et D sont symétriques par rapport à Δ = (AG). Et d'autre part $\widehat{BAC} = \widehat{DAE}$ car les triangles ABC et AED sont congruents. On en déduit par addition que $\widehat{BAG} = \widehat{GAE}$ . L'égalité des angles $\widehat{BAG} = \widehat{GAE}$ et des distances AB = AE assure que B et E sont symétriques par rapport à la droite (AG) = Δ. CQFD.