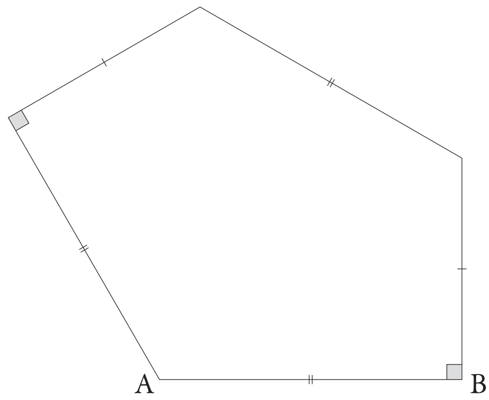
I . Énoncé

Une table de bureau originale

Un menuisier a conçu une nouvelle table de réunion modulable. Son plateau a la forme d'un pentagone non régulier. Sachant que la longueur AB vaut 60 cm et que l'angle en A vaut 120°, pourriez-vous donner la valeur exacte de l'aire de ce plateau ?



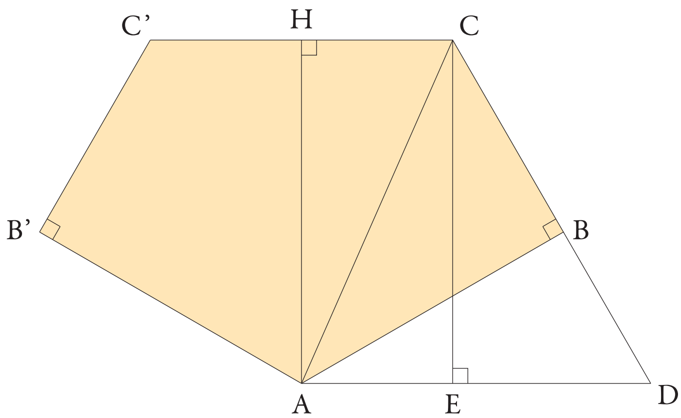
II . Remarques préliminaires

1 . Aire d'un triangle équilatéral en fonction de sa hauteur

Soit respectivement a et h le côté et la hauteur d'un triangle équilatéral. Son aire est $\mathscr{A} = \dfrac{1}{2}\mathrm{ah}$ et sa hauteur $\mathrm{h} = \mathrm{a}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ d'où $\mathscr{A} = \mathrm{h}^2\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

2 . Coup d'œil sur la figure

Pour toute la suite, l'unité est la longueur AB. Pour obtenir les réponses en centimètres (respectivement en centimètres carrés), les résultats obtenus ici sont donc à multiplier par 60 (respectivement 3 600).



Les sommets de la table sont appelés comme il est indiqué sur la figure. Vu la construction, la perpendiculaire issue de A au côté opposé [CC'] de la table en est un axe de symétrie. Soit H son point d'intersection avec ce côté. On construit aussi la perpendiculaire en A à la droite (AH). Soit E le projeté orthogonal de C sur cette dernière. D est le point d'intersection des droites (BC) et (AE).

L'angle en A valant 120°, l'angle $\widehat{HAB}$ vaut 60° donc $\widehat{BAD}$ vaut 30° et l'angle en D vaut 60°. On a ainsi $AD = \dfrac{AB}{\cos 30°} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. Comme, pour que $CC' = AB = 1$, il faut que $AE = \dfrac{1}{2}$ on a $ED = AD - AE = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} - \dfrac{1}{2}$.

Le triangle CED est la moitié d'un triangle équilatéral de hauteur [CE]. Le côté de ce triangle mesure $2ED = \dfrac{4\sqrt{3}}{3} - 1$ donc sa hauteur est $CE = 2ED\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

III . Avec une seule table

La figure reste la même. L'aire du trapèze rectangle ADCH est $\dfrac{1}{2}(AD + CH) \times CE = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3} + \dfrac{1}{2}\right) \times \left(2 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

Celle de demi-triangle équilatéral ABD de hauteur AB est $\dfrac{1}{2}AB^2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Donc celle de la moitié de la table est leur différence $\dfrac{2\sqrt{3}}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{8} - \dfrac{\sqrt{3}}{6} = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ et celle de la table $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

IV. Utilisation de trois tables

Trois tables sont assemblées comme indiqué sur la figure. Les bords extérieurs de l'assemblage sont prolongés de façon à mettre en place les points O, O_1 et O_2 et, ainsi, construire le triangle équilatéral OO_1O_2.

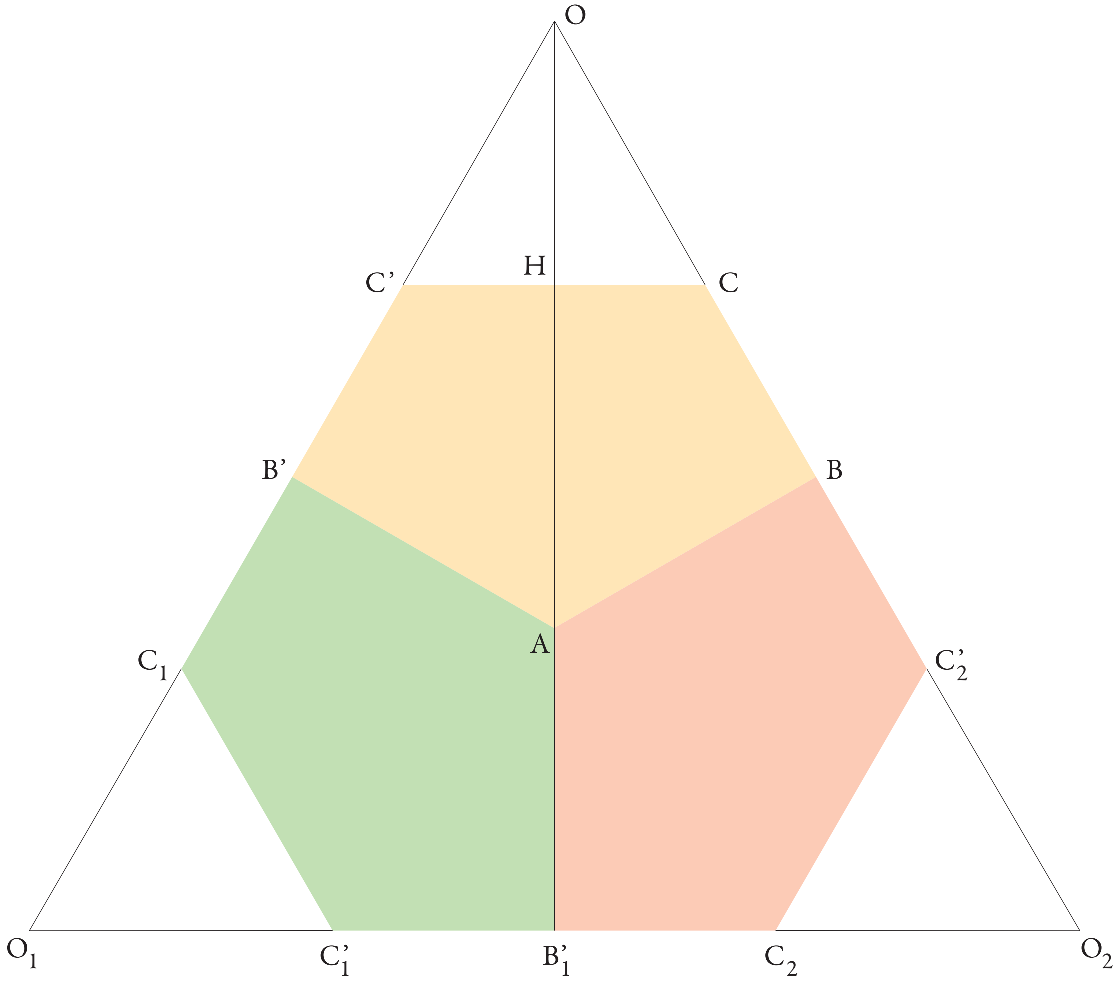
La hauteur OB'_1 de ce triangle mesure $OH + HA + AB'_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \left(2 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1 = 3$.

Son aire est donc $3^2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}$.

Par hypothèse, le côté CC' du triangle équilatéral OCC' mesure 1.

Son aire est donc $\dfrac{1}{2}CC' \times OH = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$. Il en est de même de celle des triangles équilatéraux $C_1O_1C'_1$ et $C_2O_2C'_2$.

L'aire de trois tables est obtenue en retranchant trois fois l'aire du triangle OCC' de celle du triangle OO_1O_2 : $3\sqrt{3} - 3 \times \dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{9\sqrt{3}}{4}$ d'où, pour une seule table, $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.



V. Un complément sans justification

L'hexagone $CC'C_1C'_1C_2C'_2$ n'est pas régulier bien que ses angles au sommet soient tous égaux à 120° et qu'il soit inscrit dans le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{5-2\sqrt{3}}$.