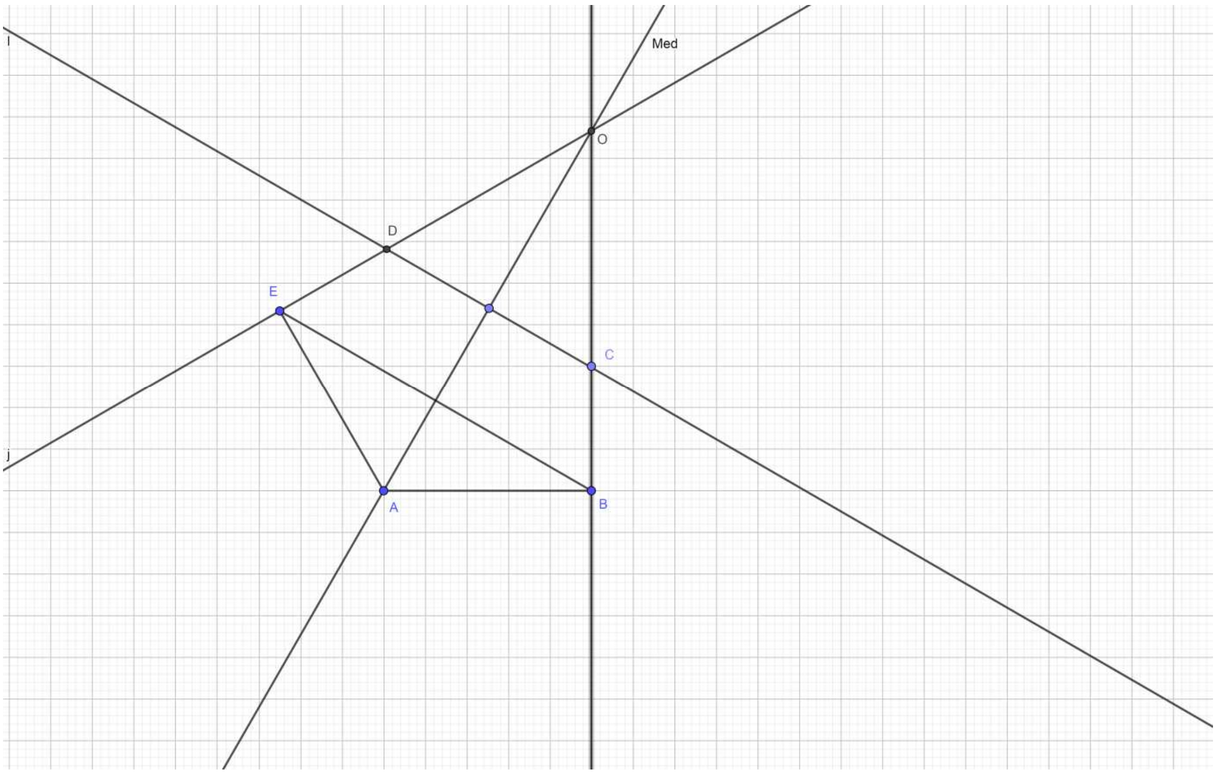
Exercice 539-1



Notons C, D et E (dans cet ordre) les trois sommets du pentagone qui ne sont pas nommés dans l'énoncé. La pentagone devient alors le pentagone $ABCDE$.

Notons a la distance AB.

Notons Med la médiatrice du segment $[BE]$. Cette droite Med est axe de symétrie de la figure. En effet, soit s la symétrie orthogonale par rapport à la droite Med. On a successivement s(B) = E puis (comme $AB = AE$) s(A) = A puis (comme $BC = ED$ et $\widehat{EBC} = \widehat{BED}$) s($C$) = D. Il en résulte que les droites (BC) et (ED) se correspondent dans la symétrie s. Par suite, leur point commun, noté 0, appartient à la droite Med.

Le triangle ABE est formé par juxtaposition de deux triangles rectangles dont la longueur de l'hypoténuse est a et dont l'un des angles mesure 60°. Il en est de même pour le triangle COD. Donc les triangles ABE et COD ont la même aire et, par suite, l'aire du pentagone $ABCDE$ est égale à celle du triangle équilatéral BOE. Comme $BE = a\sqrt{3}$, l'aire du triangle BOE est $\frac{1}{2}BE \times \frac{BE\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \times 3a^2\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$ et donc l'aire du pentagone $ABCDE$ est $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

On se souvient alors que $a =$ 60, l'unité étant le cm, donc l'aire du pentagone $ABCDE$ est $\frac{3\sqrt{3}}{4}3600 = 2700\sqrt{3}$, l'unité étant le cm².

****