539.2 Une table de bureau originale

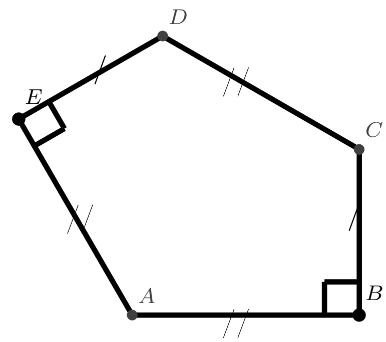
Un menuisier a conçu une table de réunion modulable.

Son plateau a la forme d'un pentagone non régulier.

Sachant que la longueur $AB = 60cm$ et que

l'angle en A vaut 120° ,et l'égalité des longueurs indiquées

il faut trouver la valeur exacte de l'aire de ce plateau.



Les droites (BC) et (ED) se coupent au point M .
Démontrons que le triangle DMC est équilatéral.
Les triangles rectangles AEM et ABM sont isométriques en effet on a $EA = AB$, ils ont le côté $[AM]$ en commun et en utilisant le théorème de Pythagore on trouve que $ME = MB$.
Les triangles AEM et ABM sont symétriques par rapport à la droite (AM), (AM) est la médiatrice de $[EB]$.
$ME = MB$ et $ED = BC$ on en déduit que $DM = MC$
D'autre part dans le quadrilatère $ABME$ l'angle $\widehat{EAB} = 120°$ les angles $\widehat{AEM}$ et $\widehat{ABM}$ mesurent 90°
alors l'angle $\widehat{EMB} = 60°$, donc $\widehat{DMC} = 60°$.
Le triangle DMC est donc équilatéral puisque $DM = MC$ et $\widehat{DMC} = 60°$
Calcul de l'aire de la table :
L'aire de la table est égale à :
$Aire(ABCDE) = Aire(ABME) - Aire(MDC)$
Calcul de l'aire de ABME :
La droite (AM) est la bissectrice de l'angle $\widehat{EAB}$
comme $\widehat{EAB} = 120°$, $\widehat{EAM} = 60°$.
On ne déduit que $EM = EA \times tan(60°) = 60\sqrt{3}$.
$Aire(AEMB) = 2 \times Aire(AEM) = 2 \times \frac{1}{2} AE \times EM$
$Aire(AEMB) = 60 \times 60\sqrt{3} = 3600\sqrt{3}$.
Calcul de l'aire de MDC :
Comme le triangle MDC est équilatéral ,
$Aire(MDC) = \frac{1}{2} \times c \times \times h = \frac{1}{2} \times c \times c\frac{\sqrt{3}}{2}$
$Aire(MDC) = \frac{1}{2} \times 60 \times 60 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 900\sqrt{3}$
On déduit que l'aire de la table est égale à :
$Aire(AEMB) = 3600\sqrt{3} - 900\sqrt{3} = 2700\sqrt{3}\ cm^2$