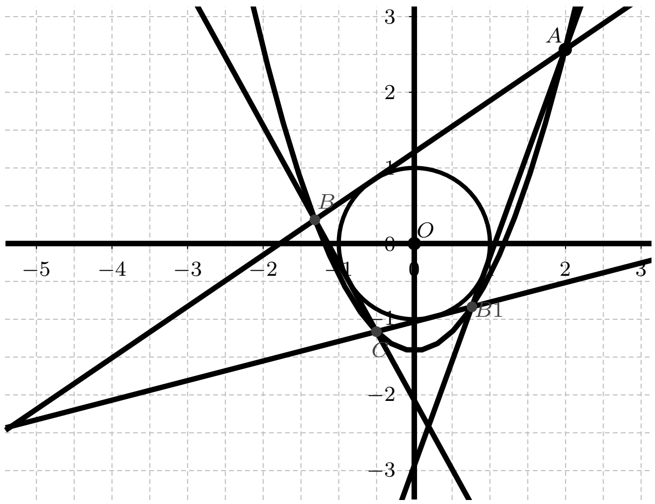
539.4 Un duo de coniques



On considère dans un repère (O, I, J), le cercle unité $\mathcal{U}$ d'équation : $x^2 + y^2 = 1$ et $(\mathcal{P})$ la parabole d'équation : $y = x^2 - \sqrt{2}$.
Soit A un point quelconque de $(\mathcal{P})$ et soient les droites (AB) et (AB_1) tangentes au cercle $\mathcal{U}$ issues de A qui recoupent la parabole $(\mathcal{P})$ en B et B_1.
1°) Les droites (AB) et (AB_1) tangentes au cercle $\mathcal{U}$ issues de A recoupent la parabole $(\mathcal{P})$ en B et B_1.
Cela suppose que le point A n'a pas pour abscisse 1 et n'a pas pour abscisse -1
car dans ces cas une des deux tangentes issues de A est parallèle à (IJ) donc ne coupe pas la parabole.
et de plus le point A n'a pas pour abscisse 0 car dans ce cas le point A serait le sommet de la parabole , les points B et B_1 ont pour abscisses respectives 1 et -1 et les tangentes à $\mathcal{U}$ issues respectivement de B et de B_1 ne passant pas par A sont parallèle à (OJ).
Comme la position de A aurait pu être B , B_1 ou C ,
il résulte que les points A, B , $B1$, et C n'ont pas pour abscisse
0 , 1 et -1 pour que les tangentes coupent la parabole.
ce que l'on supposera dans la suite du problème.

Démontrons que les tangentes au cercle $\mathcal{U}$ issues de B et B_1 autres que (BA) et (B_1A) se coupent en un point C appartenant à la parabole $(\mathcal{P})$

Déterminons les équations des tangentes à $\mathcal{U}$ issues de A coupant la parabole aux points B et B_1
$A \in \mathcal{P}$ donc le point A a pour coordonnées $(x_A; x_A^2 - \sqrt{2})$
$B \in \mathcal{P}$ donc le point B a pour coordonnées $(x_B; x_B^2 - \sqrt{2})$
donc $\overrightarrow{AB}\left(x_B - x_A; x_B^2 - x_A^2\right)$. $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{u}\,(1; x_A + x_B)$
donc une équation de (AB) est de la forme : $(x_A + x_B)x - y + c = 0$
$A \in (AB)$ donc $(x_A + x_B)x_A - y_A + c = 0$
$x_A^2 + x_Bx_A - (x_A^2 - \sqrt{2}) + c = 0$
$c = -x_Bx_A - \sqrt{2}$
donc (AB) a pour équation :
$(x_A + x_B)x - y - x_Bx_A - \sqrt{2} = 0$
(AB) est tangente au cercle $\mathcal{U}$ donc $d(O, (AB)) = 1$
$\Leftrightarrow \dfrac{|-x_Bx_A - \sqrt{2}|}{\sqrt{(x_A^2 + x_B^2 + 1}} = 1 \Leftrightarrow x_B^2(x_A^2 - 1) + 2x_Ax_B(\sqrt{2} - 1) - x_A^2 + 1 = 0$
$(x_A^2 - 1) \neq 0$ car $x_A \neq 1$ et $x_A \neq -1$

l'abscisse du point B est solution de l'équation du second degré
$(x_A^2-1)x^2+2x_A(\sqrt{2}-1)x-x_A^2+1=0$
$\triangle=4(x_A^2+y_A^2-1)$
comme tous les points de la parabole sont à l'extérieur du cercle
$d(O,A)>1$ donc $x_A^2+y_A^2>1$ donc $\triangle>0$
on a donc deux solutions distinctes qui sont les abscisses de B
et de B_1.
le produit des racines est $\dfrac{c}{a}=\dfrac{-x_A^2+1}{x_A^2-1}=-1$
les abscisses de B et de B_1 vérifient $x_Bx_{B_1}=-1$,on a alors $x_{B_1}=\dfrac{1}{x_B}$
En utilisant la même démarche,
On trouve de même que comme $x_B^2-1\neq 0$,
les tangentes issues de B vont couper la parabole
au point A et à un point C tel que $x_Ax_C=-1\iff x_C=\dfrac{1}{x_A}$
et que les tangentes issues de B_1 vont couper la parabole
au point A et à un point D tel que $x_Ax_D=-1\iff x_D=\dfrac{1}{x_A}$
Il résulte que les points C et D sont deux points de la parabole
ayant la même abscisse , ils sont donc confondus.
Les tangentes à $\mathcal{U}$ issues respectivement de B et de B_1 se coupent en un point de la parabole

2°)On a A$(x_A;x_A^2-\sqrt{2})$;C$(-\dfrac{1}{x_A};\dfrac{1}{x_A}^2-\sqrt{2})$
La droite (AC) a pour équation : $y=(x_A-\dfrac{1}{x_A})x+1-\sqrt{2}$
On trouve de même que la droite (BB_1) a pour équation :
$y=(x_B-\dfrac{1}{x_{B_1}})x+1-\sqrt{2}$
Ces deux droites se coupent au point $K(0;1-\sqrt{2})$ qui est situé sur l'axe de la parabole.

3°) Pour démontrer que les intersections des paires de côtés opposés de chacun des quadrilatères ABCB_1 et MNPQ sont alignées sur une même droite $(\triangle)$ il suffit de montrer que les polaires de ces points sont concourantes.
E le point d'intersection de (AB) et (B_1C) ,
F le point d'intersection de (BC) et (AB_1C)
G le point d'intersection de (MQ) et (NP)
H le point d'intersection de (MN) et (PQ) .
E,F,G et H sont alignés ssi leurs polaires sont concourantes.
• Polaire de E
(EA) et (EB_1) sont tangentes au cercle au point M et P respectivement donc la polaire de E est la droite (MP)
• Polaire de F
(FC) et (FB_1) sont tangentes au cercle au point Q et N respectivement donc la polaire de F est la droite (QN)
• Polaire de G
(MQ) et (NP) se coupent en G.
La droite (MQ) est la polaire du point B , $G\in(MQ)$ donc la polaire de G passe par B .
La droite (NP) est la polaire du point B_1 , $G\in(MQ)$ donc la polaire de G passe par B_1 .
donc la polaire de G est la droite (BB_1).
• Polaire de H

(MN) et (PQ) se coupent en H.
La droite (MN) est la polaire de A ,$H \in (MN)$ donc la polaire de H passe par A .
La droite (PQ) est la polaire de C ,$H \in (PQ)$ donc la polaire de H passe par C .
donc la polaire de H est la droite (AC).

Les polaires des points E , F , G et H sont respectivement (MP) , (QN) , (BB_1) et (AC).

Les droites (AC) et (BB_1) se coupent au point K. et les droites (MP) et (QN) se coupent aussi en K les polaires sont concourantes donc les points E,F , G et H sont alignés sur la droite $(\triangle)$.
Remarque : On peut trouver l'équation de $\triangle$
Comme $K \in (AC) \cap (BB_1)$ alors la polaire de K passe par les points H et G.
La polaire de K est la droite $(\triangle)$.
soit H le projeté orthogonal de K sur $(\triangle)$,on a :
$OK \times OH = r^2 = 1$ d'où $OH = \dfrac{1}{1-\sqrt{2}} = -1-\sqrt{2}$
comme $(\triangle)$ est perpendiculaire à (OK)
$(\triangle)$ a pour équation : $y = -1-\sqrt{2}$
on remarque que le point S est le milieu de $[KH]$