540-1 Un défi niveau terminale

Pour x réel, $1-\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)=\frac{1-cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}=\frac{sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$). De sorte que l'égalité proposée peut se réécrire :

$$4\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)^2 f(x)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\right)^2\frac{4}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$

Faisons alors tendre x vers 0 :

$\frac{e^{2x}-1}{2x}\rightarrow 1$ quand x tend vers 0, $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\rightarrow 1$ quand x tend vers 0 et $f(x)\rightarrow f(0)$ quand x tend vers 0 car f est continue, de sorte que :

$4\times 1^2\times f(0)=\pi^2\times 1^2\times\frac{1}{1+1}$ et donc $f(0)=\frac{\pi^2}{8}$.

Ce que semble confirmer la calculatrice.