Exercice 540-2

On cherche les triplets de nombre premiers (p,q,r) avec $p<q<r$ tel que $A=(r-p)(r-q)(q-p)+1$ et $B=3p+5q$ représentent le même nombre premier

Supposons que $p\geq 3$, p, q sont impairs donc B est pair. On doit donc poser $p=2$.

On a alors
$(r-2)(r-q)(q-2)+1=6+5q$ soit $(r-2)(r-q)(q-2)=5+5q=5(1+q)$ et $q\geq 3$

$(r-2)(r-q)=5\dfrac{(1+q)}{(q-2)}$ doit être un entier

On pose $f(x)=5\dfrac{(1+x)}{(x-2)}$, $f'(x)=5\times\dfrac{1\times(x-2)-(1+x)\times 1}{(x-2)^2}=5\times\dfrac{-3}{(x-2)^2}<0$

Sur $[3,+\infty[$, f est décroissante et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=5$ donc à partir d'un certain x, $5<f(x)<6$

On va résoudre $f(x)=5\dfrac{(1+x)}{(x-2)}=6$ d'où $5(1+x)=6(x-2)$ soit $5+5x=6x-12$ donc $x=17$.

Donc $3\leq q\leq 17$.

Si $q=3$, $f(3)=5\dfrac{(1+3)}{(3-2)}=20$ et $B=3p+5q=6+15=21=7\times 3$ n'est pas premier, cela ne va pas.

Si $q=5$, $f(5)=5\dfrac{(1+5)}{(5-2)}=10$ et $B=3p+5q=6+25=31$

Si $q=7$, $f(7)=5\dfrac{(1+7)}{(7-2)}=8$ et $B=3p+5q=6+35=41$

Si $q=11$, $f(11)=5\dfrac{(1+11)}{(11-2)}=\dfrac{60}{9}=\dfrac{20}{3}$ cela ne va pas, ce n'est pas un entier.

Si $q=13$, $f(13)=5\dfrac{(1+13)}{(13-2)}=\dfrac{70}{11}$ cela ne va pas, ce n'est pas un entier.

Si $q=17$, $f(17)=5\dfrac{(1+17)}{(17-2)}=6$, $B=3p+5q=6+85=91=13\times 7$ n'est pas premier, cela ne va pas.

Il y a deux valeurs possibles pour q, on va regarder ces deux cas en utilisant le fait que $r>q$ premier et solution d'une équation du second degré

Si $q=5$, $(r-2)(r-5)=10$ soit $r^2-7r=0$ donc $r=7$
Si $q=7$, $(r-2)(r-7)=8$ soit $r^2-9r+6=0$. Or $r\geq 11$ et $P(x)=x^2-9x+6$ est croissant sur $[11,+\infty[$ et $P(11)=11^2-9\times 11+6=121-99+6=28$. Donc il n'y a pas de triplet convenable.

On a donc qu'un seul triplet $(2,5,7)$ valable
$A=(7-2)(7-5)(5-2)+1=5\times 2\times 3+1=31$ et $B=3p+5q=6+25=31$
En enlevant la contrainte premier on a aussi le triplet (2,3,7)
$A=(7-2)(7-3)(3-2)+1=5\times 4\times 1+1=21$ et $B=3p+5q=6+15=21$