

Exercice 540-3

N'oublions pas la retenue !

En utilisant la somme des termes d'une suite géométrique

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \sum_{i=0}^{i=n} q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Pour $|q| < 1$ on est à l'intérieur du disque de convergence, on a $f(q) = \sum_{i=0}^{+\infty} q^i = \frac{1}{1 - q}$ et en dérivant

$$f'(q) = \sum_{i=1}^{+\infty} i q^{i-1} = \frac{1}{(1 - q)^2}$$

Si on prend $q = \frac{1}{1000}$

$$f'\left(\frac{1}{1000}\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} i \left(\frac{1}{1000}\right)^{i-1} = \frac{1}{(1 - 1000)^2}$$

Or $\sum_{i=1}^{+\infty} i \left(\frac{1}{1000}\right)^{i-1} = 1 \times \left(\frac{1}{1000}\right)^{1-1} + 2 \times \left(\frac{1}{1000}\right)^{2-1} + 3 \times \left(\frac{1}{1000}\right)^{3-1} + \dots = 1 + \frac{2}{1000} + \frac{3}{1000^2} + \dots$

et $\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{1000}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{999}{1000}\right)^2} = \frac{1000^2}{999^2} = \frac{1000000}{998001}$

En multipliant par $\frac{1}{1000}$ on a

$$\frac{1}{1000} \times \frac{1000000}{998001} = \frac{1000}{998001} = \frac{1}{1000} + \frac{2}{1000^2} + \frac{3}{1000^3} + \dots = 0,001002003\dots$$

Que se passe-t-il vers 1000.

$$\begin{aligned} \frac{1000}{998001} &= \frac{1}{1000} + \dots + \frac{997}{1000^{997}} + \frac{998}{1000^{998}} + \frac{999}{1000^{999}} + \frac{1000}{1000^{1000}} + \frac{1001}{1000^{1001}} + \frac{1002}{1000^{1002}} + \dots \\ \frac{1000}{998001} &= \frac{1}{1000} + \dots + \frac{997}{1000^{997}} + \frac{998}{1000^{998}} + \frac{999}{1000^{999}} + \frac{1}{1000^{999}} + \frac{1001}{1000^{1001}} + \frac{1000}{1000^{1002}} + \frac{2}{1000^{1002}} + \dots \\ \frac{1000}{998001} &= \frac{1}{1000} + \dots + \frac{997}{1000^{997}} + \frac{998}{1000^{998}} + \frac{1000}{1000^{999}} + \frac{1000}{1000^{1001}} + \frac{1}{1000^{1001}} + \frac{1}{1000^{1001}} + \frac{2}{1000^{1002}} + \dots \\ \frac{1000}{998001} &= \frac{1}{1000} + \dots + \frac{997}{1000^{997}} + \frac{998}{1000^{998}} + \frac{1}{1000^{998}} + \frac{1}{1000^{1000}} + \frac{2}{1000^{1001}} + \dots \\ \frac{1000}{998001} &= \frac{1}{1000} + \dots + \frac{997}{1000^{997}} + \frac{999}{1000^{998}} + \frac{1}{1000^{1000}} + \frac{2}{1000^{1001}} + \dots \\ \frac{1000}{998001} &= \frac{1}{1000} + \dots + \frac{997}{1000^{997}} + \frac{999}{1000^{998}} + \frac{0}{1000^{999}} + \frac{1}{1000^{1000}} + \frac{2}{1000^{1001}} + \dots \end{aligned}$$

On va symboliser le calcul précédent par un schéma pour bien voir la retenue à la manière d'une addition de primaire

```

997 000 000 000 000 000
+   998 000 000 000 000
+   999 000 000 000 000
+   1 000 000 000 000
+   1 001 000
+   1 002
+   1
-----
997 999 000 001 002 003

```

Et un peu plus loin, c'est pareil on a le même schéma en ajoutant 999 à la puissance

$$\frac{1000}{998001} = \frac{1}{1000} + \dots + \frac{997}{1000^{1996}} + \frac{998}{1000^{1997}} + \frac{999}{1000^{1998}} + \frac{1000}{1000^{1999}} + \frac{1001}{1000^{2000}} + \frac{1002}{1000^{2001}} + \dots$$

$$\frac{1000}{998001} = \frac{1}{1000} + \dots + \frac{997}{1000^{1996}} + \frac{998}{1000^{1997}} + \frac{999}{1000^{1998}} + \frac{1}{1000^{1998}} + \frac{1000}{1000^{2000}} + \frac{1}{1000^{2000}} + \frac{1000}{1000^{2001}} + \frac{2}{1000^{2001}} \dots$$

$$\frac{1000}{998001} = \frac{1}{1000} + \dots + \frac{997}{1000^{1996}} + \frac{998}{1000^{1997}} + \frac{999}{1000^{1998}} + \frac{1}{1000^{1998}} + \frac{1000}{1000^{2000}} + \frac{1}{1000^{2000}} + \frac{1000}{1000^{2001}} + \frac{2}{1000^{2001}} \dots$$

$$\frac{1000}{998001} = \frac{1}{1000} + \dots + \frac{997}{1000^{1996}} + \frac{998}{1000^{1997}} + \frac{1}{1000^{1998}} + \frac{1}{1000^{1999}} + \frac{2}{1000^{2000}} + \dots$$

$$\frac{1000}{998001} = \frac{1}{1000} + \dots + \frac{997}{1000^{1996}} + \frac{999}{1000^{1997}} + \frac{1}{1000^{1999}} + \frac{2}{1000^{2000}} + \dots$$

$$\frac{1000}{998001} = \frac{1}{1000} + \dots + \frac{997}{1000^{1996}} + \frac{999}{1000^{1997}} + \frac{0}{1000^{1998}} + \frac{1}{1000^{1999}} + \frac{2}{1000^{2000}} + \dots$$

On a toujours

$$\begin{array}{r} 997\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000 \\ + \quad 998\ 000\ 000\ 000\ 000 \\ + \quad 999\ 000\ 000\ 000 \\ + \quad 1\ 000\ 000\ 000 \\ + \quad 1\ 001\ 000 \\ + \quad 1\ 002 \\ + \quad 1 \\ \hline 997\ 999\ 000\ 001\ 002\ 003 \end{array}$$

Et ainsi de suite, on peut donc voir que 998 n'apparaît jamais !