Exercice 540 -4

1.

Soit ABC un triangle rectangle en A et A' le milieu de [BC]. A' est le centre du cercle circonscrit de ABC. AA'B e AA'C sont des triangles isocèle. Pour que (AA') soit une trisectrice que l'angle BAA' soit égal à 60 degrés et l'angle CAA' à 30 degrés ou l'inverse. Ainsi on a un triangle isocèle avec un angle de 60 degrés c'est donc un triangle équilatéral. L'angle ABC est donc de 60 degrés et BCA de 30 degrés ou l'inverse.

Conclusion pour que le triangle rectangle dont la médiane est issue de l'angle droit soit aussi une trisectrice il faut avoir un triangle 30, 60, 90 degrés.

2.

On se place dans un repère orthonormé on a $A(0,0)$, $B(c,0)$ et $C(AC \times \cos\alpha, AC \times \sin\alpha)$. α est l'angle en A.

$\frac{2\alpha}{3}$ est l'angle BAA' et $\frac{\alpha}{3}$ est l'angle A'AC.

Dans le triangle ABC, A' est le milieu de [BC]. L'aire de ABA' est égale à l'aire de ACA' donc

$$\frac{AB \times AA' \times \sin\frac{2\alpha}{3}}{2} = \frac{AA' \times AC \times \sin\frac{\alpha}{3}}{2}$$

Donc $AB \times AA' \times \sin\frac{2\alpha}{3} = AA' \times AC \times \sin\frac{\alpha}{3}$ et $c \times \sin\frac{2\alpha}{3} = AC \times \sin\frac{\alpha}{3}$ soit $AC = c\,\frac{\sin\frac{2\alpha}{3}}{\sin\frac{\alpha}{3}}$.

Or $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ donc $AC = c \times \frac{2\sin\frac{\alpha}{3}\cos\frac{\alpha}{3}}{\sin\frac{\alpha}{3}} = 2c \times \cos\frac{\alpha}{3}$

et $C\left(2c \times \cos\frac{\alpha}{3} \times \cos\alpha, 2c \times \cos\frac{\alpha}{3} \times \sin\alpha\right)$

C appartient donc au limaçon trisecteur que l'on peut voir comme tout un tas de courbe (cf https://mathcurve.com/courbes2d/limacon/limacontrisecteur.shtml).

Par analogie il existe un triangle qui ont deux trisectrices médianes, intersection du limaçon précédent et de son symétrique par rapport à la médiatrice de [AC].

Dans ce triangle le point C est sur la médiatrice de [AC].

On a alors $2c \times \cos\frac{\alpha}{3} \times \cos\alpha = \frac{c}{2}$ soit $4 \times \cos\frac{\alpha}{3} \times \cos\alpha = 1$

Or $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ donc $4 \times \cos\frac{\alpha}{3} \times \left(4\cos^3\frac{\alpha}{3} - 3\cos\frac{\alpha}{3}\right) = 1$

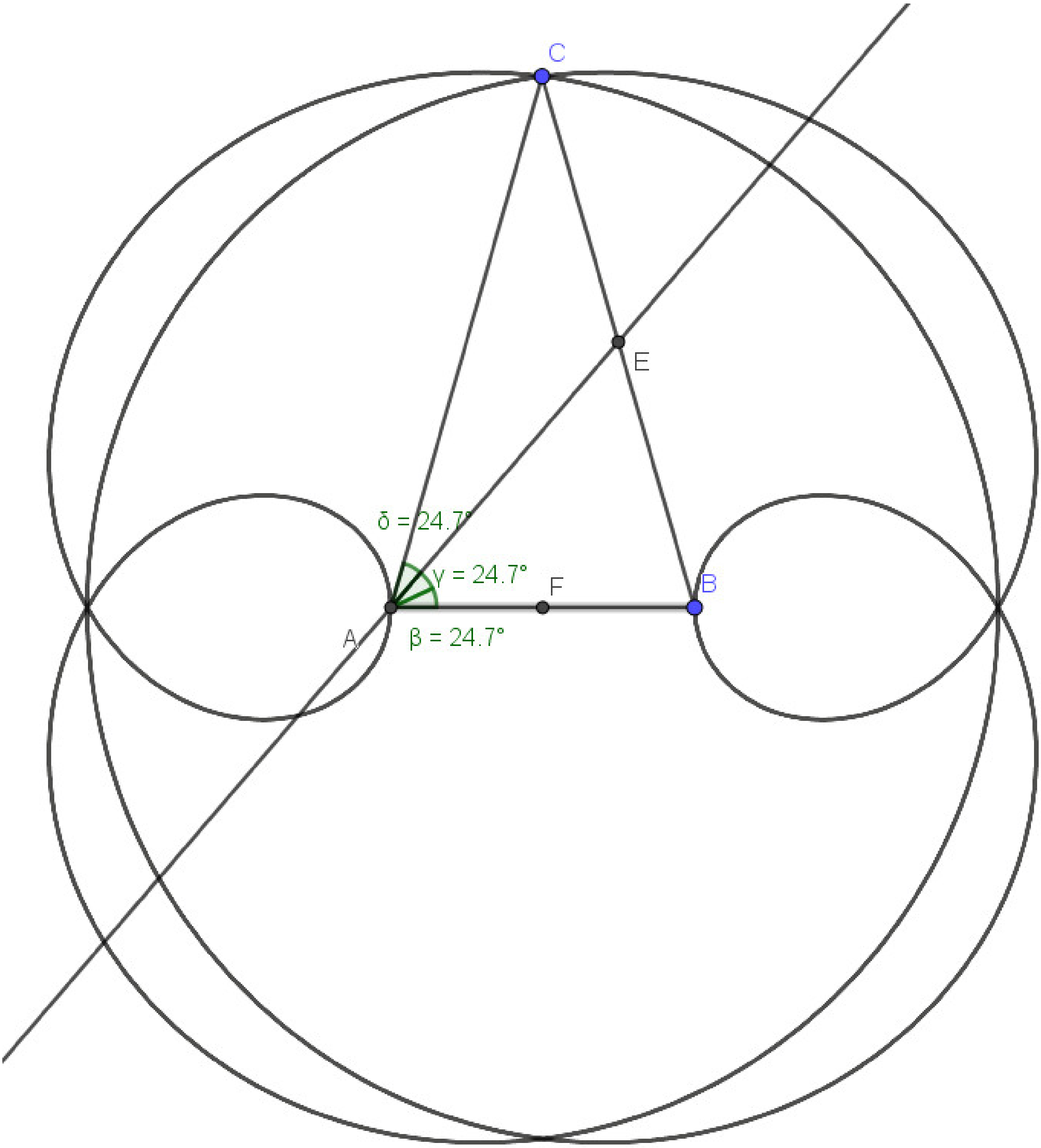
soit $16 \times \cos^4\frac{\alpha}{3} - 12\cos^2\frac{\alpha}{3} - 1 = 0$

On va donc résoudre $16x^2 - 12x - 1 = 0$

$\Delta = 144 + 4 \times 16 = 208$

$x_1 = \frac{12 - \sqrt{208}}{32} = \frac{3 - \sqrt{13}}{8} < 0$ et $x_2 = \frac{12 + \sqrt{208}}{32} = \frac{3 + \sqrt{13}}{8} > 0$

donc $\cos^2\frac{\alpha}{3} = \frac{3 + \sqrt{13}}{8}$ et $\cos\frac{\alpha}{3} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{13}}{8}}$ soit au final $\alpha = 3\arccos\sqrt{\frac{3 + \sqrt{13}}{8}} \approx 74°$


C
E
δ = 24.7°
γ = 24.7°
F
B
A
β = 24.7°