Curiosité numérique.

Si on calcule $\frac{1000}{998001}$ on trouve

$$\frac{1000}{998001} = 0{,}001\ 002\ 003\ 004\ 005 \ldots 996\ 997\ 999\ 000\ 001\ 002 \ldots$$

En y regardant de plus près, les 2994 premières décimales, regroupées par 3, sont
001 002 003 … 996 997 999 c'est-à-dire tous les entiers consécutifs depuis 001 jusqu'à 999 sauf 998.
Il y a un truc, lequel ?

Explication :

- Si x est un réel compris entre 0 et 1, on a $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$ soit, en dérivant et en multipliant par x

$$\sum_{i=0}^{\infty} i x^i = \frac{x}{(1-x)^2} \qquad (1)$$

On remplace dans (1) x par 1 / 1000 pour obtenir

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{1000^i} = \frac{1/1000}{(999/1000)^2} = \frac{1000}{998001}$$

En remplaçant dans l'égalité ci-dessus i par 1, 2, 3, …, 999, 1000, 1001, 1002, 1003,… on voit que $\frac{1000}{998001}$ est égal à la somme $\frac{1}{1000} + \frac{2}{1000^2} + \frac{3}{1000^3}$, ... C'est-à-dire 0,001 + 0,000002 + 0,000000003 + …

En ne représentant que les décimales, l'addition ci-dessous montre bien que 999 disparait et que 998 se transforme en 999 à cause de la retenue venant de la colonne grisée qui se propage sur 3 colonnes.

0	0	1																																			
				0	0	2																																
								0	0	3																													
									……																													
												9	9	6																								
															9	9	7																					
																		9	9	8																		
																					9	9	9															
																							1	0	0	0												
																										1	0	0	1									
																													1	0	0	2						
																																1	0	0	3			
																																			1	0	0	4
0	0	1	0	0	2	0	0	3	……			9	9	6	9	9	7	9	9	9	0	0	0	0	0	1	0	0	2	0	0	3	0	0	4	0		

La séquence des 2997 décimales (**001002003…996997999000**) se reproduit indéfiniment car on vérifie que la longueur de la période du développement de la fraction $\frac{1000}{998001}$ est égale à $2997 = 3 \times 999$.

- Pour le démontrer :

Ou bien on vérifie que la longueur de la période, c'est-à-dire la plus petite valeur positive de l'exposant k qui vérifie $10^k \equiv 1 \ mod\ 998001$ est égale à 2997. C'est facile avec une calculette programmable.

Ou bien on vérifie directement, en posant $T = 0{,}001002003 \ldots 996997999000$
que

$$T\,(1 + 10^{-2997} + 10^{-2\times 2997} + 10^{-3\times 2997} + \cdots) = \frac{1000}{998001} \qquad (2)$$

On remarque pour cela que $T = 0{,}001002003 \ldots 996997998999 + 10^{-2997}$
Donc

$$T = 10^{-2997} + \sum_{i=1}^{i=999} i \times 1000^{-i} = 1000^{-999} + \sum_{i=1}^{i=999} i \times 1000^{-i} \qquad (3)$$

Puis on utilise l'identité

$$\sum_{i=1}^{n} i\, x^i = \frac{x}{(1-x)^2}\left[n x^{n+1} - (n+1)x^n + 1\right] \qquad (4)$$

[Qui se démontre comme (1) plus haut] dans laquelle on remplace x par 1/1000.
(3) et (4) donnent après quelques arrangements :

$$T = 1000^{-999} + \frac{1000^{1000} - 999001}{998001 \times 1000^{999}} = \frac{1000^{1000} - 1000}{998001 \times 1000^{999}} \qquad (5)$$

Or $(1 + 10^{-2997} + 10^{-2\times2997} + 10^{-3\times2997} + \cdots) = \frac{1}{1-10^{-2997}} = \frac{10^{2997}}{10^{2997}-1} = \frac{1000^{999}}{1000^{999}-1}$ (6)

On a bien d'après (2) (5) et (6)

$$T\,(1 + 10^{-2997} + 10^{-2\times2997} + 10^{-3\times2997} + \cdots) = \frac{1000^{1000} - 1000}{998001 \times 1000^{999}} \times \frac{1000^{999}}{1000^{999} - 1} = \frac{1000}{998001}$$

- Tout cela vient du fait que $998001 = 999^2$.

On a de même $\frac{100}{9801} = \frac{100}{99^2} = 0,\mathbf{01\ 02\ 03\ 04\ 05} \ldots \mathbf{96\ 97\ 99\ 00}$ 01 02 ... où 98 est absent.

Et aussi $\frac{10}{81} = \frac{10}{9^2} = 0,\mathbf{123456790}$ 123456790 123456790 123456790 ... où 8 est absent.

Dans le même genre on a

$\frac{1}{9998} = 0.000\mathbf{1}\ 000\mathbf{2}\ 000\mathbf{4}\ 000\mathbf{8}\ 00\mathbf{16}\ 00\mathbf{32}\ 00\mathbf{64}\ 0\mathbf{128}\ 0\mathbf{256}\ 0\mathbf{512}\ \mathbf{1024}\ \mathbf{2048}\ \mathbf{4096}\ \mathbf{8193}$ 6387 ...