540-4 Crescendo

Question 1 (Robert Ferréol)

Soit ABC un triangle rectangle en A, tel que le côté [AB] soit le plus proche de la trisectrice qui est en même temps médiane.

On choisit AB comme unité de longueur et l'on note b la longueur AC.

Soit M le milieu de [BC].

On peut choisir un repère orthonormé direct, d'origine A, tel que B, C, M aient pour coordonnées :

$$B \left| \begin{array}{l} 1 \\ 0 \end{array} \right. \qquad C \left| \begin{array}{l} 0 \\ b \end{array} \right. \qquad M \left| \begin{array}{l} 1/2 \\ b/2 \end{array} \right.$$

La droite (BC) a pour équation : $x + \frac{y}{b} = 1$

La trisectrice a pour équation : $y = x \cdot \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{x}{\sqrt{3}}$

En résolvant le système, on obtient l'abscisse du point d'intersection des deux droites : $\frac{b\sqrt{3}}{1+b\sqrt{3}}$

En écrivant que cette abscisse coïncide avec l'abscisse $\frac{1}{2}$ de M, on obtient : $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Les triangles rectangles solutions sont donc ceux dont les côtés sont proportionnels à 1, $\sqrt{3}$, 2.

Question 2 (Djelloul Sebaa)

Soit ABC un triangle tel que le côté [AB] soit le plus proche de la trisectrice issue de A, qui est en même temps la médiane issue de A.

On choisit AB comme unité de longueur et l'on note b la longueur AC.

Soit M le milieu de [BC].

Soit α le tiers de l'angle en A du triangle ABC.

On peut choisir un repère orthonormé direct, d'origine A, tel que B, C, M aient pour coordonnées :

$$B\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right. \qquad\qquad C\left|\begin{matrix}b\cdot\cos 3\alpha\\ b\cdot\sin 3\alpha\end{matrix}\right.$$

La droite (BC) a pour équation : $\begin{vmatrix} x-1 & b\cdot\cos 3\alpha-1\\ y & b\cdot\cos 3\alpha\end{vmatrix}=0$

La trisectrice a pour équation : $y = x\cdot\tan\alpha$

En résolvant le système, on obtient l'abscisse du point d'intersection des deux droites :

$$\frac{b\cdot\cos\alpha\cdot(4\cos^2\alpha-1)}{2b\cdot\cos\alpha+1}$$

En écrivant que cette abscisse coïncide avec l'abscisse $\frac{1+b\cdot\cos\alpha\cdot(4\cos^2\alpha-3)}{2}$ de M, on obtient :

$$2b^2\cdot\cos^2\alpha\cdot(4\cos^2\alpha-3)+b\cdot\cos\alpha\cdot(1-4\cos^2\alpha)+1=0$$

Le discriminant de ce polynôme du second degré en b est : $\Delta=\cos^2\alpha\cdot(4\cos^2\alpha-5)^2$

On en déduit : $b=\frac{1}{2\cos\alpha}$ ou $\frac{1}{\cos 3\alpha}$

- Si $\alpha\geq\frac{\pi}{6}$ alors $b=\frac{1}{2\cos\alpha}$ est la seule possibilité

  Alors : $a^2=b^2+1-2b\cdot\cos 3\alpha=\frac{-16\cos^4\alpha+16\cos^2\alpha+1}{4\cos^2\alpha}$

  Les triangles solutions sont donc ceux dont les côtés sont proportionnels à :

  $$1,\ 2\cos\alpha,\ \sqrt{-16\cos^4\alpha+16\cos^2\alpha+1}.$$

- Si $\alpha<\frac{\pi}{6}$ une deuxième solution est possible avec $b=\frac{1}{\cos 3\alpha}$

  Alors : $a^2=b^2+1-2b\cdot\cos 3\alpha=\tan^2 3\alpha$

  Les triangles solutions sont donc ceux dont les côtés sont proportionnels à $1,\ \cos 3\alpha,\ \sin 3\alpha$.