Au fil des problèmes n° 540-2

Trouver tous les nombres premiers $p < q < r$ tels que $A = (r-p)(r-q)(q-p) + 1$ et $B = 3p + 5q$ représentent le même nombre premier.

Solution de Marc Roux

1) S'il existe une solution : B est un nombre premier, B > 2, donc B est impair ; si p et q étaient impairs, 3p et 5q seraient impairs donc 3p + 5q serait pair. Donc le plus petit des deux nombres p, q est égal à 2 : p = 2
2) On doit donc résoudre dans N l'équation à 2 inconnues $(r - 2)(r - q)(q - 2) + 1 = 6 + 5q$, qui s'écrit aussi $(r - 2)(r - q)(q - 2) = 5 + 5q$ ou encore (E) : $(r - 2)(r - q)(q - 2) = 5(1 + q)$
L'un au moins des 3 facteurs $(r - 2)$, $(r - q)$, $(q - 2)$ est donc multiple de 5.
a) Supposons que $(q - 2)$ est multiple de 5 : il existe k tel que $q = 5k + 2$, l'équation devient $(r - 2)(r - q)(5k) = 5(1 + 5k + 2)$, soit après simplification
$(r - 2)(r - q)(k) = (5k + 3)$
$(5k + 3)$ est donc multiple de k, donc 3 est multiple de k. D'où k = 1 ou k = 3
(i) Si k = 1 alors q = 7 et (E) devient : $(r - 2)(r - 7)(5) = 5 . 8$, ou encore $(r - 2)(r - 7) = 8$
On vérifie que les deux solutions réelles de cette équation sont non-entières.
(ii) Si k = 3 alors q = 17 et (E) devient : $(r - 2)(r - 17)(15) = 5 . 18$, ou encore
$(r - 2)(r - 17) = 6$. On vérifie de même que cette équation n'a pas de solution entière.
b) On déduit de a) que $(q - 2)$ n'est pas multiple de 5, et donc que $(r - 2)(r - q)$ est multiple de 5 ; posons $(r - 2)(r - q) = 5m$. L'équation (E) devient $5m(q-2) = 5(1 + q)$, ou $m(q-2) = (1 + q)$; donc $(1 + q)$ est multiple de $(q - 2)$. Il existe n entier tel que
$n=\frac{1+q}{q-2}=\frac{q-2+3}{q-2}=1+\frac{3}{q-2}$; $\frac{3}{q-2}$ est donc un entier positif, d'où q = 3 ou q = 5
(i) Si q = 3 alors (E) devient : $(r - 2)(r - 3)(1) = (5.4)$, $(r - 2)(r - 3) = 20$, qui a une solution entière positive : r = 7. Avec ces valeurs : r = 7, q = 3, p = 2, on trouve bien A = B, mais leur valeur commune est 21, qui n'est pas un nombre premier et ne donne donc pas une solution au problème.
(ii) Si q = 5 alors (E) devient : $(r - 2)(r - 5)(3) = (5.6)$, soit $(r - 2)(r - 5) = 10$, qui a aussi pour solution entière positive : r = 7. Avec ces valeurs : r = 7, q = 5, p = 2, on trouve A = B = 31, qui est bien un nombre premier.

Conclusion : le problème a une solution unique : p = 2, q = 5, r = 7.