

540-1 Un défi niveau terminale (François Denizou- Villeurbanne)

Un élève a proposé ce petit défi. La difficulté est d'arriver à répondre à la question uniquement avec des outils de terminale, sinon c'est beaucoup plus facile.

Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} :

$$(e^{2x} - 1)^2 f(x) = 4 - 4\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

Déterminer la valeur de $f(0)$.

Solution proposée par Daniel Vacaru, Pitesti, Roumanie

$$\text{On a } f(x) = \frac{4 - 4\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{(e^{2x} - 1)^2} = \frac{8\sin^2\left(\frac{\pi}{4}x\right)}{(e^{2x} - 1)^2} = 8 \cdot \frac{\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}x\right)}{x^2}}{\frac{(e^{2x} - 1)^2}{x^2}} \text{ pour } x \neq 0.$$

$$\text{On sait que } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{x} = \alpha \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\beta x} - 1}{x} = \beta.$$

$$\text{On obtient } f(0) = 8 \cdot \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{2^2} = \frac{\pi^2}{8}$$