540=2. Une double représentation (Vincent Thill - Migennes)

Trouver tous les nombres premiers $p < q < r$ tels que $A = (r-p)(r-q)(q-p) + 1$ et $B = 3p + 5q$ représentent le même nombre premier.

Solution proposée par Daniel Văcaru, Pitești, Roumanie

Si, par absurde, p et q sont impaire, B est paire, contradiction. Il suit que $p = 2$. On a donc l'égalité $A = B = 6 + 5q \Rightarrow (r-2)(r-q)(q-2) + 1$. Il suit

$$(r-2)(r-q)(q-2) = 5 + 5q \Leftrightarrow (r-q)(rq - 2r - 2q + 4) = 5 + 5q.$$

On obtient $r^2q - rq^2 - 2r^2 + 2rq - 2rq + 2q^2 + 4r - 4q = 5 + 5q \Rightarrow r^2(q-2) - r\left(q^2 - 4\right) + 2q^2 - 9q - 5 = 0$. Il suit que

$$2q^2 - 9q - 5 \vdots q - 2 \Rightarrow \frac{2q^2 - 9q - 5}{q-2} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{2q^2 - 4q - 5q + 10 - 15}{q-2} \in \mathbb{N} \Rightarrow 2q - 5 - \frac{15}{q-2} \in \mathbb{N}.$$

On trouvé que $q - 2 \in \{1, 3, 5, 15\} \Rightarrow q \in \{3, 5, 7, 17\}$.

Pour $q = 3$, on obtient $(r-2)(r-3) = 20 \Rightarrow r = 7$. Pour $q = 5$, on a $(r-2)(r-5) \cdot 3 = 30 \Rightarrow (r-2)(r-5) = 10 \Rightarrow r = 7$. Pour $q = 7$, on trouvé $5(r-2)(r-7) = 40 \Rightarrow (r-2)(r-7) = 8$,contradiction. Enfin, pour $q = 17 \Rightarrow 15(r-2)(r-17) = 90 \Rightarrow (r-2)(r-17) = 6$,contradiction.

Nous avons trouvé

éliminé car A et B premiers

$$(p, q, r) \in \{(2, 3, 7); (2, 5, 7)\}.$$