# Solution du 542-4 : un pentagone équilatéral inscrit dans un triangle

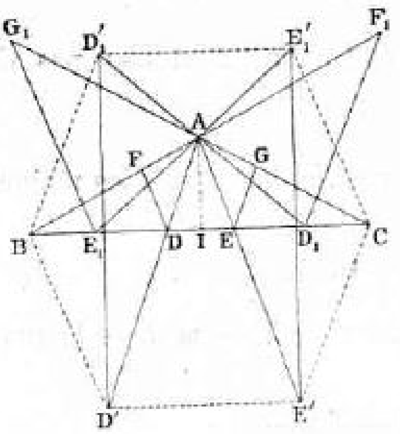
Voici l'énoncé et la solution de l'exercice 1658 publié le 15 mars 1886 dans le JOURNAL DES MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES 10 $^{e}$ année, N° 13) (qui coûtait 0 $^{f}$ 30 au numéro, 5 $^{f}$ l'abonnement aux 20 numéros de l'année) publié par Henri VUIBERT (l'APMEP n'existait pas encore…)

**1658.** — *Un triangle isocèle ABC étant donné, trouver sur sa base BC deux points D, E, et sur les côtés AB, AC deux points F, G, tels que le pentagone AFDEG ait ses côtés égaux.*

Supposons le problème résolu. Menons la parallèle BD′ à FD et la parallèle CE′ à GE. A cause de la symétrie, D′E′ est parallèle à BC, et les pentagones ABD′E′C, AFDEG sont homothétiques. Donc

$$AB = BD' = D'E' = E'C.$$

**De là, cette construction :** on mène, de part et d'autre de la hauteur AI, deux parallèles à cette droite, situées à des distances de AI égales à $\dfrac{AB}{2}$ ; on décrit, de B et C comme centres, deux circonférences passant par A et qui coupent respectivement les parallèles en D′ et $D'_1$, E′ et $E'_1$. Il ne reste plus qu'à tirer AD′, AE′, ce qui détermine D et E ; puis à mener les parallèles DF, EG à D′B, E′C.




Le pentagone concave $AF_1D_1E_1G_1$, homothétique du pentagone $ABD'_1E'_1C$, est une seconde solution.

Lorsque $AB < 2BI$, la distance $BI - \dfrac{AB}{2}$ de B à la parallèle $D'D'_1$ est toujours moindre que AB, et le problème admet deux solutions.

Lorsque $AB \geqslant 2BI$, la distance $\dfrac{AB}{2} - BI$ de B à la parallèle $D'D'_1$ est évidemment inférieure à AB ; les deux solutions ci-dessus existent donc toujours. De plus, comme ici $AB > BI + \dfrac{AB}{2}$, la circonférence B coupe la parallèle $E'E'_1$ en deux points auxquels correspondent, ainsi qu'on le verra par une figure, deux nouveaux pentagones concaves, à côtés croisés.

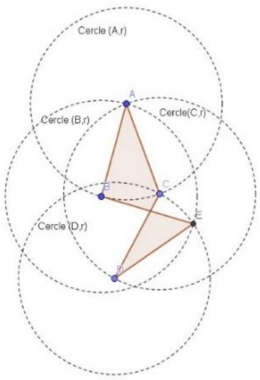
Dans le cas particulier où $AB = 2BI$, les deux premiers pentagones ont les côtés DF et EG perpendiculaires à BC ; quant aux deux autres pentagones, ils se réduisent au triangle équilatéral ABC.

(C. Gross, à Nancy.)

On se rappellera avec émotion, pour ceux qui l'on pratiqué, que la solution de la construction commence par la phrase rituelle : "Supposons le problème résolu"…
Mais surtout on remarquera le flou dans les notations : AB désignant à la fois un nombre (la longueur) et un objet géométrique (segment ou droite ?). Je n'avais pas regardé la démonstration lors de l'envoi de l'énoncé et en remplaçant dans l'énoncé AB par [AB] j'ai privé les éventuels chercheurs des solutions concaves. Mea culpa mea maxima culpa.

Après avoir résolu le problème à peu près comme à l'époque, je me suis demandé pourquoi se cantonner au triangle isocèle alors que l'on peut construire des pentagones équilatéraux d'une infinité de façons serait-il possible d'en inscrire un (ou plusieurs) dans un triangle quelconque ?

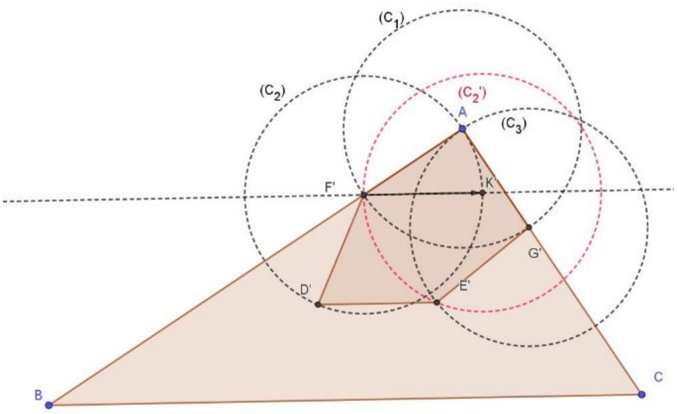
**Construction d'un pentagone équilatéral quelconque :**




On construit un premier cercle de centre A et de rayon r. Sur sa circonférence on choisit deux points B et C et l'on trace deux cercles de centre B et C et de rayon r. Sur la circonférence de ce dernier on choisit un point D comme centre du cercle de rayon r. On appelle E l'intersection de Cercle (B,r) et de Cercle (D,r) et il est facile de vérifier que ABEDC est bien équilatéral.
Les choix possibles de B, C et D permettent d'obtenir toutes les variétés de pentagones équilatéraux (convexes, concaves, équilatéraux…) et même de choisir, ce qui va être bien utile pour la suite, la direction de la droite (DE)

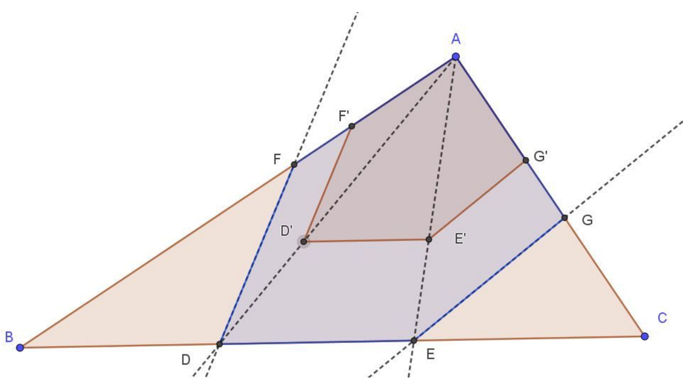
**Inscription du pentagone dans un triangle ABC quelconque :**

On va d'abord construire un pentagone équilatéral AF'D'E'G' "plus petit" ayant les propriétés nécessaires (c'est-à-dire égalité des côtés et parallélisme de (D'E') avec (BC)) de sorte qu'en utilisant l'homothétie adéquate, on obtienne le pentagone cherché. De plus on considérera que les côtés sont des segments.




Soit $(C_1)$ le cercle de centre A qui coupe [AB] et [AC] en F' et G' de rayon r = AB = AC puis $(C_2)$ le cercle de centre F' et de rayon r et enfin $(C_3)$ le cercle de centre G' et de rayon r. Il faut construire D' sur $(C_2)$ et E' sur $(C_3)$ tels que [D'E'] soit parallèle à [BC] et de longueur r.
Pour cela on va utiliser le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AK}$ (K étant le point d'intersection entre la parallèle à [BC] passant par F' et $(C_2)$), pour translater $(C_2)$ en $(C_2')$ dont l'intersection avec $(C_3)$ fournit le point E' qu'il suffit de translater par le vecteur $-\vec{u}$ pour obtenir D' sur $(C_2)$.
On obtient ainsi le pentagone AF'D'E'G' cherché.

Il reste maintenant à le faire grandir par l'homothétie de centre A qui transforme D' en D pour obtenir le pentagone en bleu AFDEG cherché.




La discussion de la constructibilité du pentagone dépend du choix des points A, B et C ce qui correspond à de très nombreuses possibilités, encore plus nombreuses si l'on considère que les côtés du triangle ABC sont des droites…
La figure sous GeoGebra "Pentagone équilatéral dans triangle qcq (4)" jointe en annexe vous permettra d'avoir une idée de la complexité de la chose, en faisant simplement se déplacer le point A