Au Fil des problèmes N 542.

Exercice 542-2

Il suffit d'appliquer l'inégalité Cauchy-Schwarz, en effet:

$$\left(\sqrt{\frac{x}{y}},\sqrt{\frac{y}{z}},\sqrt{\frac{z}{x}}\right)\cdot\left(\sqrt{xy},\sqrt{yz},\sqrt{zx}\right)^2 \leq \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)(xy+yz+zx)\,. \tag{1}$$

En effectuant le produit scalaire du membre de gauche, on obtient en définitive:

$$(x+y+z)^2 \leq \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)(xy+yz+zx)\,. \tag{2}$$

On applique à nouveau l'inégalité Cauchy-Schwarz:

$$\left(\sqrt{\frac{x}{y}},\sqrt{\frac{y}{z}},\sqrt{\frac{z}{x}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{xy}},\frac{1}{\sqrt{yz}},\frac{1}{\sqrt{zx}}\right)^2 \leq \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right) \tag{3}$$

On obtient donc:

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2 \leq \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right) \tag{4}$$

Il suffit de remarquer pour conclure que $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) = (xy+yz+zx)\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)$. Les nombres x, y, z étant strictement positifs l'inégalité demeure inchangée en multipliant les inéquations (2) et (4) membre à membre :

$$(x+y+z)^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2 \leq \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)^2(xy+yz+zx)\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right) \tag{5}$$

puis simplifier chaque membre par $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$, comme suit:

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \leq \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)^2 \tag{6}$$