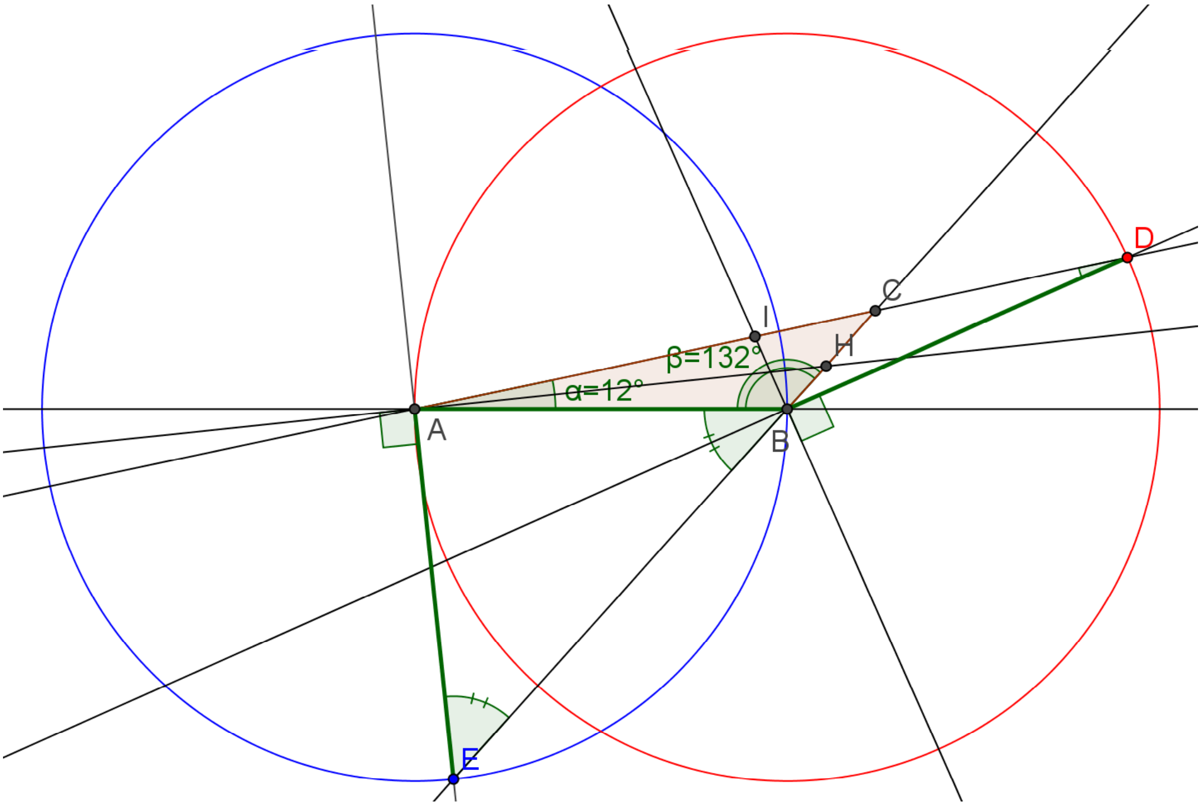
Au fil des problèmes 542-1

Le plus difficile est de faire une figure correspondant au problème... A la main, si on ne connaît pas les angles au départ, ce n'est pas évident, donc on peut utiliser un logiciel de géométrie :
j'ai choisi de garder C mobile, avec D et E pieds des bissectrices extérieures issues respectivement de A et B, et de faire coïncider par tâtonnement D sur le cercle rouge et E sur le cercle bleu : expérimentalement, on obtient une figure unique (A et B étant fixés), et un résultat approché, qu'il reste à valider ou non :



Toutes les mesures d'angles géométriques sont exprimées en degrés.

On note $\alpha = \widehat{BAC}$ et $\beta = \widehat{ABC}$, *H* et *I* les pieds des bissectrices intérieures issues respectivement de *A* et *B*.

Dans le triangle isocèle *BAE*, on a $\widehat{ABE} = 180 - \beta$, donc $\widehat{BAE} = 180 - 2(180 - \beta)$, d'où

$\widehat{BAE} = -180 + 2\beta$.

$\widehat{BAE}$ et $\widehat{BAH} = \dfrac{\alpha}{2}$ étant complémentaires, on a $\dfrac{\alpha}{2} - 180 + 2\beta = 90$, d'où $\dfrac{\alpha}{2} + 2\beta = 270$ (1).

Par ailleurs, $\widehat{CBD}$ et $\widehat{CBI}$ étant complémentaires, on a $\widehat{CBD} = 90 - \dfrac{\beta}{2}$.

Dans le triangle isocèle *BAD*, on a donc $2\alpha + \beta + 90 - \dfrac{\beta}{2} = 180$, d'où $2\alpha + \dfrac{\beta}{2} = 90$ (2).

La résolution du système $\begin{cases} \dfrac{\alpha}{2} + \beta = 270 \\ 2\alpha + \dfrac{\beta}{2} = 90 \end{cases}$ donne le résultat conjecturé : $\begin{cases} \alpha = 12 \\ \beta = 132 \end{cases}$.

Une question se pose : peut-on faire la figure à la règle et au compas sans connaître les angles ?